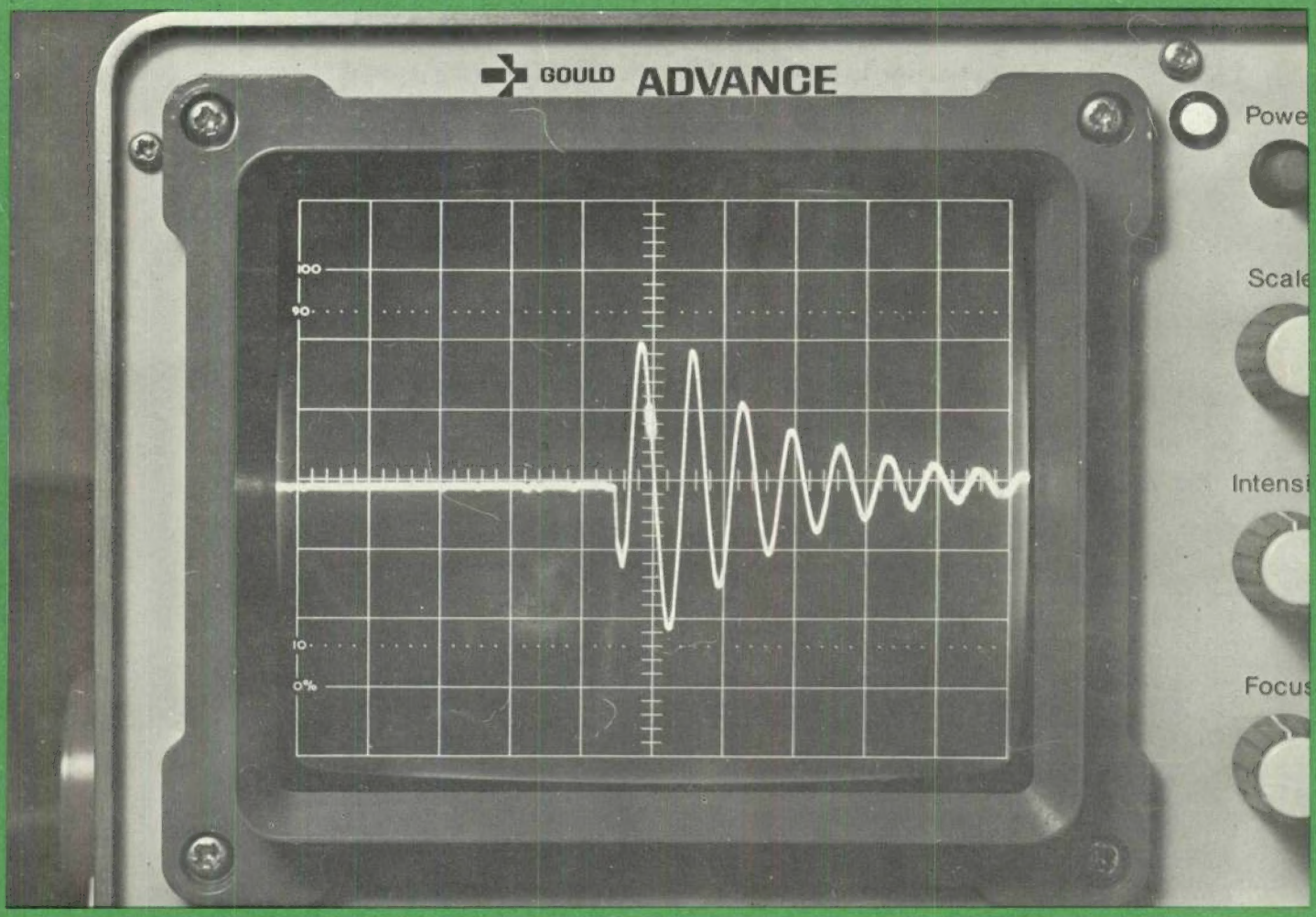
técnica



435 associação dos estudantes do instituto superior técnico
outubro 1976 revista de engenharia

CÁLCULO
DE
PÓRTICOS

Método de cálculo simples e rápido, entrando em linha de conta com o deslocamento dos nós

Por

G. KANI

Traduzido por

ANÍBAL S. A. VIEIRA

Engenheiro civil (I. S. T.)

TÉCNICA

Associação dos Estudantes do I. S. T.

LISBOA — 1962

PREÇO 75.00

DESC. 10% AOS ASSINANTES

técnica

NÚMERO 435 OUTUBRO DE 1976 ANO LI VOLUME XXXVIII PUBLICAÇÃO MENSAL

DIRECTOR

Delmar Baptista

COLABORADORES

António Maria da Fonseca

José Agostinho Marques

Jorge Braz

Armando Ruano

Manuel M. S. Anastácio

José Luis S. V. Azevedo

DIRECÇÃO REDACÇÃO E ADMINISTRAÇÃO

Av. Rovisco Pais, I. S. T. — Lisboa
Telefone 72 93 23

PROPRIETÁRIO

A. E. I. S. T.

★

ASSINATURAS:	5 n.os	10 n.os
Continente e Ilhas	140$00	250$.
Países de língua Portuguesa e Espanha	150$00	270$.
Estrangeiro	—	300$.
Número avulso ...	—	35$.

Não se publica em Agosto e Setembro.

Os artigos assinados são da exclusiva responsabilidade dos autores.

★

COMPOSIÇÃO E IMPRESSÃO

COOP. ESPÍRITO SANTO, SCARL
Rua do Espírito Santo, 19-A - Odivelas

SUMÁRIO

1 — R. MINDLIN — Education and research in mechanics in the U. S. A.

Ensino e investigação em mecânica nos E. U. A.

5 — E. R. ARANTES E OLIVEIRA — Some applications of functional analysis in the mathematical theory of structures.

Algumas aplicações da análise funcional na teoria matemática das estruturas.

11 — JOSÉ DE MATOS LOPES TEIXEIRA — Programação linear com relevo para a programação linear inteira e com variáveis Booleanas.

Linear programming with enphasis on linear integer programming and Boolean Variables.

47 — J. C. CONTE — Sobre o problema da difusão de Rutherford.

On the problem of the scattering of Rutherford.

59 — S. POMPEU DOS SANTOS — Matriz dos coeficientes técnicos do sector da indústria da construção.

Technical coefficients matrix of construction industry sector.

73 — GALE SALMON — Técnicas de retenção osciloscópica.

Oscilloscopic retention techniques.

ÍNDICE ALFABÉTICO DOS ANUNCIANTES

	Pág.		Pág.
Aguiar & Melo, Lda.	VI	Soc. Electricidade Brown Boveri	V
Fanafel	IV	Sociedade Portuguesa Cavan . .	II
MAGUE	III	S. K. F., Lda.	I
Novobra, Lda.	IV	Sondagens e Fundações A. Cavaco	II

NOTA DA REDACÇÃO (*)

Por deficiências de vária ordem que não conseguimos ultrapassar não nos foi possível a publicação das revistas referentes aos meses de Abril a Julho.

Pelo facto pedimos desculpa aos assinantes e leitores em geral com a convicção de que o mesmo não voltará a acontecer.

A TÉCNICA

(*) A continuação do artigo «Introdução aos Conjuntos Vagos» de António Gouvêa Portela será publicada na Técnica n.º 438 - JANEIRO-77.

BIBLIOTECA DO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA LISBOA

OFERTA

SKF

A SKF não tem apenas rolamentos de esferas e de rolos .

Temos também rolamentos de agulhas

rótulas e embutes .

Evidentemente, temos do mesmo modo toda a espécie de acessórios para rolamentos.

Além disso a SKF fabrica muitos outros produtos de qualidade.

Rodas e carretos cónicos, por exemplo

Fusos roscados de rolamento de alta precisão que transformam o movimento de rotação em linear.

Fabricamos também machos cassonetes

e brocas .

O mesmo se passa com pontos rotativos .

E muitos sabem que também temos um bom Serviço Técnico.

SOCIEDADE SKF LIMITADA

LISBOA - PRAÇA DA ALEGRIA, 66-A
TELEF.: 362301 - TELEGR.: ESKAEF - TELEX: 12156

PORTO - RUA DELFIM FERREIRA, 604
TELEF.: 692054 - TELEGR.: ESKAEF

Av. Visconde Valmor, 76-1.º - Tel. 766014 (7 linhas) Lisboa-1

Edições da Técnica

TABELA DE PREÇOS

TABELAS PARA CÁLCULO DE BETÃO ARMADO
J. S. Brazão Farinha, 6.ª edição — 1970 . . 375$00

TOPOGRAFIA GERAL
C. Xerez — 1.º vol. 2.ª edição — 1970 . . (*)
C. Xerez — 2.º vol. 2.ª edição — 1966 . . 180$00

TABELAS TÉCNICAS
Vicente e Eng.º Brasão Farinha, 7.ª edição — 1974 250$00

MANUAL DE HIDRÁULICA GERAL
A. Lencastre, 2.ª edição — 1969 . . . . 375$00

DICIONÁRIO DE UNIDADES E TABELAS DE CONVERSÃO
Vasco Costa e Osvaldo Francês, 1.ª edição — 1959 35$00

GUIA DE ANÁLISE QUÍMICA DAS ÁGUAS
A. Herculano de Carvalho, 1.ª edição — 1961 90$00

CÁLCULO DE PÓRTICOS
G. Kani — Trad. da 7.ª edição alemã — 1962 75$00

MANUAL DE ESTRUTURAS
Brasão Farinha — 1.º VOLUME . . . . . (*)

BETÃO PREESFORÇADO
(A cargo dos participantes na Semana de Betão Preesforçado — I. S. T. — 1975) . . (*)

(*) LIVROS A PUBLICAR BREVEMENTE

Desconto de 10% aos assinantes

PEDIDOS À **técnica**

técnica

NÚMERO 435 OUTUBRO DE 1976 ANO LI VOLUME XXXVIII PUBLICAÇÃO MENSAL

C.D.U. 378/5.001:621(76)

Education and research in mechanics in the U. S. A.

R. Mindlin
Professor

ENSINO E INVESTIGAÇÃO EM MECÂNICA NOS ESTADOS UNIDOS

O artigo dá informação sobre a organização do ensino e investigação no domínio da Mecânica nos Estados Unidos. Foi apresentado pelo autor durante a última sessão, dedicada ao Ensino e à Investigação em Mecânica, do 1.º Congresso Português de Mecânica Teórica e Aplicada (Dezembro de 1974).

EDUCATION AND RESEARCH IN MECHANICS IN THE U.S.A.

Information is given about the organization of Education and Research in the field of Mechanics in the U.S.A. The paper was presented by the author during the last session, devoted to Education and Research in Mechanics, of the First Portuguese Congress on Theoretical and Applied Mechanics (December 1974).

I'm supposed to talk about the organization of Education and Research in Mechanics in the USA. However, there is no such organization. Unlike most European countries, there is no Central, Federal, Ministry of Education that has control of either education or research. In fact, there are only three federal schools in the USA: the schools that train the army officers, the navy officers and the aviators, and there is no Mechanics research or higher Mechanics education conducted in those schools.

There are about 3.500 institutions of higher education in USA. Most of them are small, privately endowed schools. In addition, each of the 50 states which make up the United States has at least one and sometimes many more institutions of higher education. For example, New York State, in which New York City is situated, has about 50 institutions of higher education of one kind or another, and California has probably as many. Some of the states of smaller population have fewer but there is least one institution of higher education and each state maintains a public institution that is supported mainly by the taxes from the State.

In further addition, there are many private Universities and private Institutes. Most of the names are probably familiar to you: Harvard, Yale, Princeton, Columbia, Stanford; these are all privatelly endowed schools which receive essentially no support either from the states or from the federal government. Then there are a few Institutes of Technology, whose names are probably also familiar to most of you: «California Institute of Technology», «Massachussetts Institute of Technology». There are also two other prominent ones: «Brooklyn Polytechnical Institute», «Stevens Polytechnical Institute».

These Institutes and the Engineering Schools in the Universities, either private or public Universities, do receive funds indirectly from the Federal Government.

To those institutions that do research (for example, in Mechanics, there are about 100 institutions in which research in Mechanics is conducted) federal funds are supplied through individual Professors. The individual professor will apply to one of perhaps 50 different government agencies for a contract to support his research; and, if he is successful, his university gets certain funds. Mainly those funds go to supply fellowhips for students to study for advanced degrees. Part of those funds, sometimes, goes to pay a part of the professor's

(*) Paper presented at the 1 st. Portuguese National Congress on Theoretical and Applied Mechanics, Lisbon, December 1974.

(**) Professor, Columbia University (New York).

salary and also a part of the funds might go towards buying the equipment necessary for laboratory work.

Now, of the 100 institutes or universities or schools that have departments in which mechanics is taught on an advanced scale, there is complete independence. In each Department of Mechanics or Department of Civil Engineering in which mechanics may be taught, or Department of Mechanical Engineering in which mechanics may be taught, each Head of Mechanics is King in his own Empire; but he is not in charge, because there are principalities in each one of these 100 Kingdoms. There is a Prince of Solid Mechanics, a Prince of Aerodynamics and more. Each one of whom usually has complete control of what he teaches and what research he does; and, so, you will find a 100, times maybe seven, or 700 principalities, each independent. The courses of instruction will vary quite widely from one extreme to another. The type of research is the choice of the Prince; and in a Civil Engineering Department you might find one Prince who is working in electromagnetic theory because that is what he happens to be interested in. There is very great freedom and so there is a very wide variety of both instruction and research over the whole country.

Now, there is no Central Administration. However, a few years ago, as result of a combination of circumstances, (President Nixon did not like scientists and so abolished «The President's Science Advisory Board») there came a tremendous reduction in the government funds available to individual professors to conduct research. (These funds also help the school, because they pay part of the professor's salaries. There is also what we call «overhead» which goes to the English Department or the History Department or to help pay other department or university expenses). As result of this reduction in funds, the Engineering Schools looked around: what shall we drop? Well, the easiest thing to drop is Mechanics, because nobody quite knows what is Mechanics: is it Civil Engineering, is it Mechanical Engineering, is it something else?. And, as result of that, the 100, actually the 101, Chairman of Departments of Mechanics got together and formed a protective organization. It is called «The Association of Chairman of Departments of Mechanics» and this is really the first gathering together of Mechanicists, from the educational view, in the USA. There are 101 members and I have turned over to your chairman the list of names, addresses and telephone numbers of each one of them; so, it is easy to get in touch with them.

This Association publishes a quartely News Letter wich gives news of what is going on Mechanics Departments throughout the country and they also publish Proceedings of meetings on special topics. For example, there was a meeting on the topic of the place of Mechanics in the engineering curriculum and I'll give a copy of that to your Chairman. That Association was organized by Bruno Boley who is a great mover, a very active member of our mechanics community. He also started, at the same time, an organization called «The American Academy of Mechanics» and this has about 500 members and it publishes a monthly journal, some copies of which I have also turned over to you chairman. That monthly journal is a little more technical than the Association of Chairman journal is.

Now, there is one organization which presumably oversees the courses of instruction in Engineering Schools and that is called «The Engineer's Council for Professional Development», that is a council composed of the five representatives from the five major Engineering Societies of the country: «The American Society of Civil Engineers», «The American Society of Mechanical Engineers», «The American Society of Chemical Engineers», «The American Institute of Electrical and Electronics Engineers» and «The American Institute of Mining and Metalurgical Engineers». They have appointed committees which are supposed to accredit Engineering Schools. They send around a small committee to each engineering school and this committee submits a report saying this engineering school has, for example, an acceptable Department of Civil Engineering; or they might say, well, in this Department of Civil Engineering they are very strong in Mechanics of Solids but they are very weak in Mechanics of Fluids. This is usually what occurs, for example, if a representative on the inspection committee happens to be a man in Fluid Mechanics. The standards of ECPD (Engineers Council for Professional Development) are not very high; it is very rare that the Department would be not accredited; but that is a commitee formed from five private societies and there is no connection with the government whatsoever.

There is also a Society for Engineering Education and this has a Mechanics Division but it is concerned mainly with problems of administration: little with education.

So much for the «organization» of education in mechanics in the USA. There is no organization, it is completely haphazard and, personally, I think that is a good thing because it makes for very broad coverage. There is no limitation on what might occur; and this gives ample room for expansion in all directions.

And, now, as for organizations concerned with research, these are essentially the technical and scientific Societies. As far as Mechanics in concerned, the largest and the most active is the Applied Mechanics Division of the American Society of Mechanical Engineers. There are about 11.000 members of that Division. The reason that Division is so very strong and predominant, is that it was the first foothold that Timoshenko gained when he came to the USA. There was then little Applied Mechanics in the USA and, as he was a Civil Engineer, he tried to start a Division of Mechanics in the American Society of Civil Engineers, but they would have none of it. And so he went to the Mechanical Engineers and, as result, there is now the most active division or society that has to do with research in Mechanics. The Engineering Mechanics Division of the American Society of Civil Engineers came along some dozen years later and that is now the next most active having to do with research in Mechanics.

Both those Societies publish journals. The ASME (Mechanical Engineering Society) publishes the Journal

of Applied Mechanics, Applied Mechanics Reviews, and Applied Mechanics News; and the Civil Engineering Society publishes the Proceedings of the Engineering Mechanics Division, and also a Mechanics News Bulletin.

Next, in activity, is the Society for Experimental Stress Analysis; it is a relatively new Society: it's only about 30 years old. They a very active group in both Experimental and Theoretical Mechanics. They publish a monthly journal «Experimental Mechanics» and an annual «Proceedings».

Then comes the «American Institute of Aeronautics and Astronautics», which is quite active in meetings and publications in those aspects of Mechanics which apply to Aeronautics and Astronautics, in particular aerodynamics and aircraft structures, and these papers appear in the AIAA Journal with which many of you are familiar. Also the American Institute of Aeronautics and Astronautics co-sponsors one meeting each year with Mechanical Engineering Society on Structures and Materials problems.

Then there is a small Society of Engineering Science which holds one annual meeting and whose founder edits the monthly «International Journal of Engineering Science. The same publisher, Pergamon Press publishes the International Journal of Solids and Structures, Computers and Structures, Engineering Fracture Mechanics and Mechanics Research Communications.

And, finally, there is the Acoustical Society of America, whose main program is acoustics. The papers presented at their meetings are published in the Journal of the Acoustical Society. A substantial portion has to do with Mechanics: vibration problems, wave propagation problems, ultrasonics problems. This is one of the main journals in which mechanics research appears.

Then, there are two more organizations, they are realy just committees: «The Midwest Mechanics Conference» and «The Southeast Mechanics Conference», each one of these holds annual meeting on mechanics and publishes Proceedings.

Finally, there is the US National Committee on Theoretical and Applied Mechanics, that is the Committee analogous to the one which has organized this meeting. This US Committee was organized about 24 years ago they sponsor a National Congress every four four years. The Seventh Congress was held just this past summer. That committee is composed of one representative from each of 10 societies: the American Society of Mechanical Engineers, The American Society of Civil Engineers, the Society for Experimental Stress Analysis, The American Institute of Aeronautics and Astronautics, The American Mathematical Society, The American Institute of Chemical Engineers, The American Physical Society for Testing Materials, The Society of Rheology and The Society for Industrial and Applied Mathematics. Each one for those 10 societies has a representative on the US National Committee for Theoretical and Applied Mechanics and that's the Committee that is represented in IUTAM, the International Union.

The US National Committee, mainly represents the US in IUTAM and chooses, among applicants, the University which will hold the National Congress; and once it does make that choice its duty is finished. For example the last Congress was held at the University of Colorado and the University of Colorado is the one that organizes the meeting, which sends out the announcements and does everything in connection with the operation of the meeting. The US National Committee supplies aproval. At the Seventh Congress that took place this past summer there were about 180 papers presented. About 70% of those papers were from university authors, about 15%, from industrial laboratories and about 15% from Government laboratories. So that you see that, roughly speaking, about 70% of research in Mechanics is done in the Universities, about 15% industrial laboratories (mostly in large industries like the Bell Telephone Laboratories or IBM), and about 15% in government laboratories.

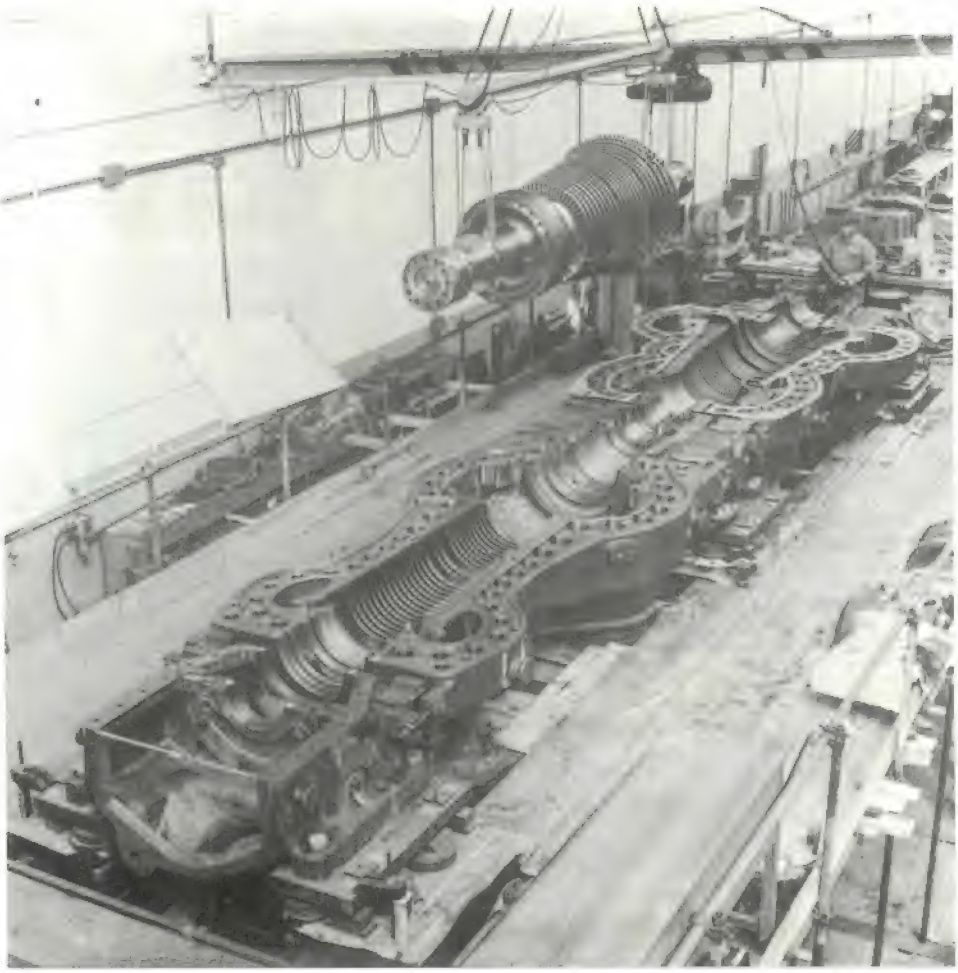
The host University, at one time, published the Proceedings; but, with inflation, it got to be too expensive and, at the last Congress, instead of having published Proceedings, the Congress Committee, The Host Committee, got together with forty-four co-operating Journals: here is the list of them. These Journals agreed to publish the papers which are acceptable to them; so that, to get a broad view of what goes on in Mechanics research in the USA it is no longer possible to look at the Proceedings. What you must look at is the program of the meeting and then write to the author, whose address is given, and find out which Journal his paper is published in, and then look at the Journal. It is a little indirect but, you see, there is no government support to these Congresses. The entire expense must either be paid by the host university or sometimes there were collected some small funds from industry or, perhaps, some small support from a government agency.

Well, that is an overall view of the disorganization of Mechanics in the USA. It is hardly necessary to say that, despite the absence of organization, or perhaps because ot it, there are many centers of research at which work of high quality and originality is in progress. Thank you.

Feiras, Conferências, Exposições e Congressos

OBJECTIVOS E PROGRAMA	LOCAL, DATA, ORGANIZAÇÕES E INFORMAÇÕES
Cálculo de Barragens — Abóbada Pelo Método dos Elementos Finitos	LNEC — Lisboa Terças e quartas-feiras, das 14 às 16,30 horas, com início em 6 de Outubro - 1976
Comportamento de Edifícios sob a Acção dos Sismos	LNEC — Lisboa 5 a 7 de Dezembro - 76
Planos Locais e Política Urbana	LNEC — Lisboa 2.ª fase — Outubro - 76 3.ª fase — Dezembro - 76
6 ème conference internationale sur la physique des plasmas et la recherche concernant la fusion nucléaire contrôlée	LNEC — Lisboa 2.ª fase — Outubro - 76 3.ª fase — Dezembro - 76

MAGUE



«Montagem em branco da turbina de 125 MW para o Grupo V da Central do Carregado.»

PONTES ROLANTES, GUINDASTES E APAR. DE ELEVAÇÃO ESPECIAIS	*Projecto e fabrico*
TURBINAS HIDRÁULICAS	*Fabrico segundo licença de A. C. M. de Vevey, S. A.*
TURBINAS A VAPOR	*Fabrico segundo licença de Brown Boveri, Cie.*
CALDEIRAS A VAPOR	*Projecto e fabrico segundo licença de Foster Wheeler, Co.*
EQUIPAMENTOS E INSTALAÇÕES INDUSTRIAIS	

CONSTRUÇÕES METALOMECANICAS **MAGUE** S.A.R.L

ALVERCA DO RIBATEJO — PORTUGAL

FILTROS TECIDOS

PARA GAZES E LÍQUIDOS
EM PEÇAS, PANOS, MANGAS OU SACOS

DE QUALQUER FIBRA NATURAL OU SINTÉTICA

FANAFEL

FÁBRICA NACIONAL DE FELTROS INDUSTRIAIS
SOCIEDADE LIMITADA

APART.: 9
TELEFS.: 52091 PBX
TELEG.: FELTROS

OVAR
PORTUGAL

ESCRITÓRIO E FÁBRICA
ESTRADA DE S. JOÃO

PRÉ-FABRICAÇÃO
em betão

MOITA

EDIFÍCIOS ESCOLARES
HABITAÇÃO SOCIAL
ESCRITÓRIOS
FÁBRICAS
MORADIAS
ETC.

materiais novobra

Fábricas em: Lisboa, Leiria, Lagoa, Guarda e Moita,
Stands de exposição em: Aveiro, Évora e Faro
Sede: Av. Est. Unidos da América, 100, 5.º - Dto. - Lisboa 5
Telefones - Serviços Administrativos: 77 48 32 - 77 29 53 - Telex: 18375 Novoba P
Serviços Técnicos: 71 41 16/7/8 - 71 93 31/2

CONSTRUA COM CONFIANÇA - CONSULTE-NOS

MEXIA HEITOR E BRASÃO FARINHA

TABELAS PARA O CÁLCULO DO BETÃO ARMADO

TECNICA
revista da associação dos estudantes do Instituto Superior Técnico
LISBOA

NÚMERO 435 OUTUBRO DE 1976 ANO LI VOLUME XXXVIII

C. D. U. 517:624.04

Some applications of functional analysis in the mathematical theory of structures (*)

E. R. Arantes Oliveira (1)
Technical University of Lisbon

RESUMO

As analogias formais entre modelos estruturais, assim como o problema da geração de modelos a partir de outros modelos, caem dentro do âmbito da Teoria Matemática das Estruturas a qual pode ser portanto formulada em três partes: um modelo genérico, regras para gerar modelos a partir de outros modelos, uma justificação para tais regras. O presente trabalho considera essas diferentes partes, recorrendo à Análise Funcional como o quadro matemático adequado à formulação da teoria.

SUMMARY

The formal analogies between structural models, together with the generation of models from other models, fall within the scope of the Mathematical Theory of Structures which therefore may be formulated as consisting of three parts: a generic model, rules for generating models from other models, a justification for those rules. The present paper considers all such parts and resorts to Functional Analysis as an adequate mathematical frame for formulating the theory.

1. *A modern view of the Theory of Structures*

Let us start by explaining what the Theory of Structures really means to the author as a part of Solid Mechanics (see [1], [2], [3]).

Solid Mechanics comprehends different models conceived for the equilibrium and deformation analysis of solids, namely three-dimensional models, two-dimensional models, one-dimensional models and discrete models.

The methods of solution of particular problems within the frame of each model do not fall within the scope of the Theory of Structures but of other theories, like the Theory of Elasticity, the Theory of Shells, the Theory of Roads, and so on.

The formal analogies between models, together with the generation of models from other models, fall however within the scope of what the author calls the Mathematical Theory of Structures, which therefore may be formulated as consisting of three parts:

— a generic model,

— rules for generating models from other models,

— a justification for such rules.

Only elastic structures under static equilibrium will be considered in the present paper. Physical linearity will not be required.

2. *The generic model*

The generic model consists in three groups of equations — force-stress, strain-displacement and stress-strain equations — involving four kinds of magnitudes — stresses, strains, forces and displacements. Such equations are supplemented by force and displacement boundary conditions (external and eventually internal) and supposed such that the work principle holds.

A couple of a stress and a strain field related by the stress-strain equations form a structural field. A structural field is called a compatible field with respect to a system of incompatibilities (a set of prescribed initial strains and displacement boundary conditions), or is said to compatibilize such system of incompatibilities, if it satisfies the strain-displacement conditions and the displacement boundary conditions. A structural field is called an equilibrated field with respect to a system of external forces (a set of prescribed body forces and force boundary conditions), or is said to equilibrate such system of external forces, if it satisfies the force-stress equations and the force boundary conditions. A

(*) Paper presented at the «Joint IUTAM/IMU Symposium on Applications of Methods of Functional Analysis to Problems of Mechanics», Marseilles, September 1975.

(1) Professor Catedrático de Engenharia Civil, Investigador do CEMUL

field which is simultaneously a compatible and an equilibrated one is an exact solution (to the structural equations and boundary conditions) with respect to given systems of incompatibilities and external forces.

Let X be the set of all the structural fields associated to a given elastic structure.

Set X can be made a vector space by defining the operations of addition and multiplication by a scalar. Such definitions can be made in different ways among which the most natural ones are schematized below:

$$\begin{array}{lll} x_1 & \text{corresponds to} & \underset{\sim}{e}_1 \\ x_2 & \text{»} & \text{»} \ \underset{\sim}{e}_2 \\ x_1 + x_2 & \text{»} & \text{»} \ \underset{\sim}{e}_1 + \underset{\sim}{e}_2 \\ x_1 & \text{corresponds to} & \underset{\sim}{s}_1 \\ x_2 & \text{»} & \text{»} \ \underset{\sim}{s}_2 \\ \underset{\sim}{x}_1 + \underset{\sim}{x}_2 & \text{»} & \text{»} \ \underset{\sim}{s}_1 + \underset{\sim}{s}_2 \end{array} \tag{2.1}$$

where $\underset{\sim}{e}$ and $\underset{\sim}{s}$ represent the strain and stress vectors.

X can still be made a Banach space by associating a norm to each of its elements. Such norm can also be defined in several ways as, for instance,

$$\| x \| = \sqrt{\int_\Delta \underset{\sim}{e} \cdot \underset{\sim}{e} \, d\Delta} \qquad \Big| \qquad \| x \| = \sqrt{\int_\Delta \underset{\sim}{s} \cdot \underset{\sim}{s} \, d\Delta} \tag{2.2}$$

where Δ denotes the domain corresponding to the structure.

The set of all the fields in X wich $\left| \begin{array}{l} \text{compatibilize} \\ \text{equilibrate} \end{array} \right|$ a given system of $\left| \begin{array}{l} \text{incompatibilities} \\ \text{external forces} \end{array} \right|$ is called an $\left| \begin{array}{l} \text{isocompatible} \\ \text{isoequilibrated} \end{array} \right|$ subset of X.

The set of all the $\left| \begin{array}{l} \text{isocompatible} \\ \text{isoequilibrated} \end{array} \right|$ subsets of X is assumed also a Banach space and denoted by $\left| \begin{array}{l} \mathcal{J} \\ \mathcal{E} \end{array} \right|$. A system of $\left| \begin{array}{l} \text{incompatibilities} \\ \text{external forces} \end{array} \right|$ corresponds thus to each element of $\left| \begin{array}{l} \mathcal{J} \\ \mathcal{E} \end{array} \right|$.

As a unique element of $\left| \begin{array}{l} \mathcal{J} \\ \mathcal{E} \end{array} \right|$ corresponds to each element of X, a function $\left| \begin{array}{l} \iota \\ \varepsilon \end{array} \right|$, assumed continuous, with domain X and range $\left| \begin{array}{l} \mathcal{J} \\ \mathcal{E} \end{array} \right|$, can be considered which associates to each element of X the corresponding element of $\left| \begin{array}{l} \mathcal{J} \\ \mathcal{E} \end{array} \right|$. We write therefore

$$\iota(x) = I \quad \Big| \quad \varepsilon(x) = E \tag{2.3}$$

where $\left| \begin{array}{l} I \in \mathcal{J} \\ E \in \mathcal{E} \end{array} \right|$.

Equations (2.3) left and right are respectively called compatibility and equilibrium equations.

Assuming that the intersection of each isocompatible and each isoequilibrated subset of X contains one and no more than one element, a one-to-one correspondence can be established between the elements of X and the elements of the cartesian product $\mathcal{J} \times \mathcal{E}$. Such cartesian product will be called the space A of the external actions while X may be called the space of responses.

Although ι and ε have no inverse, a function X can still be considered with domain A and range X,which associates to each pair (I, E) of an isocompatible and an isoequilibrated subset the corresponding unique intersection, x. We write

$$x = \chi(I,E) \tag{2.4}$$

and assume χ a continuous function.

With the help of the work principle, the total potential and complementary energy theorems can be proved. The total $\left| \begin{array}{l} \text{potential} \\ \text{complementary} \end{array} \right|$ energy theorem states that the exact solution makes the total $\left| \begin{array}{l} \text{potentl-} \\ \text{comple-} \end{array} \right.$ $\left| \begin{array}{l} \text{mentary} \\ \text{al} \end{array} \right|$ energy stationary on the set of the $\left| \begin{array}{l} \text{compatible} \\ \text{equilibrated} \end{array} \right|$ fields. Such theorems become minimum theorems if stability is admited.

The total $\left| \begin{array}{l} \text{complementary} \\ \text{potential} \end{array} \right|$ energy being a continuous functional, $\left| \begin{array}{l} T_E(x) \\ T_I^*(x) \end{array} \right|$, on X (index $\left| \begin{array}{l} E \\ I \end{array} \right|$ refers to the system of $\left| \begin{array}{l} \text{external forces} \\ \text{imcompatibilities} \end{array} \right|$ which the functional corrsponds to), the minimum total $\left| \begin{array}{l} \text{po-} \\ \text{com-} \end{array} \right.$

tential / plementary | energy theorem may be enounced

by stating that χ (I, E) minimizes | $T_E(x)$ on I / $T_I^*(x)$ on E |

The distance between two structural fields, i. e., two elements of X, could of course be defined as the norm (defined as above) of their difference. As it will become clear later, however, a more convenient definition consists in making

$$d^2 s = {}^1/_2 \int_{\Delta} \underset{\sim}{\delta s} \cdot \underset{\sim}{\delta e} \, d\Delta \tag{2.5}$$

for two elements such that the norm of their difference is small, and then defining the distance between two arbitrary points x_1 and x_2 as the smallest obtained by adding the infinitesimal distances along all possible continuous(*) pathes in X between x_1 and x_2, i. e., by making

$$d(x_1, x_2) = \min \int_{x_1}^{x_2} ds \tag{2.6}$$

where ds denotes the distance, defined through (2.5), between two points very near each other.

As it may be proved that

$$\delta^2 T_E = \int_{\Delta} \underset{\sim}{\delta s} \cdot \underset{\sim}{\delta e} \, d\Delta \text{ on I} \quad \Big| \quad \delta^2 T_I = \int_{\Delta} \underset{\sim}{\delta s} \cdot \underset{\sim}{\delta e} \, d\Delta \text{ on E} \tag{2.7}$$

at $x = \chi$ (I, E) and as, at the same point, $\delta T_E = \delta T_I^* = 0$ on | I / E |, there follows, considering (2.5) that, if | $h \in I_o$ / $h \in E_o$ | and $\|h\|$ is very small,

$$d^2(x + h, x) = T_E(x + h) - T_E(x) \quad \Big| \quad d^2(x + h, x) = - T_I(x + h) - T_I$$

where E_o and I_o denote the zero elements of $\mathcal{E}$ and $\mathcal{I}$.

A more general scheme may be introduced [4] which covers any situation in which an extremum principle is known to exist. Such scheme simply considers space X and a family Φ of continuous functionals φ which are assumed to admit a proper minimizer s on each subset C belonging to a certain class of subsets of X, called constrained subsets of X. s is assumed a critical point of φ on C, i. e., at point s, grad φ vanishes on C.

The constrained subsets are assumed homeomorphic to a certain linear subspace of X and their union is assumed to coincide with X.

The set of all the minimizers corresponding to all the constrained subsets of X is called a minimizing subset of X. Each minimizing subset corresponds to a certain functional $\varphi \in \Phi$, and the union of the minimizing subsets corresponding to all the functionals of family Φ is also assumed to coincide with X.

The intersection of each constrained and each minimizing subset of X is assumed to contain one and no more than one element.

Elements belonging to the same | constrained / minimizing | subset of X will be called | isoconstrained / isominimizing | in X.

Reference to such general scheme is made, for sake of commodity, along the next Sections.

3. *The generation rules*

In what concerns the rules for generating models from other models, their importance in the Theory of Structures can be realized if it is considered that discretization, i. e., the generation of discrete models from continuous models, is the typical method of the structural analyst. As, on the other hand, the generation of a discrete model is quite analogous to, for instance, the generation of a two-dimensional model from a three-dimensional one, there is no reason why the study of discretization should not be included within a general theory of the generation of models, which comprehends the description of general generation rules and their justification with the help of convergence analyses.

The procedures for generating new models in the Theory of Structures are essentially two dual ones: the potential and the complementary energy methods [1, 2, 3].

The | potential / complementary | energy method starts by defining the generated | strains and displacements / stresses and tractions | in terms of the generating ones. Generated | strain- / force- | displacement -stress | equations and | displacement / force | boundary conditions are simultaneously introduced which must satisfy the condition of being exact in the frame of the generating model. Such equations introduce a

(*) Continuity gained of course a meaning as soon as the norm was defined.

correspondence between the generated and the generating fields which may be represented by the equation

$$y = B_1 x \tag{3.1}$$

where B_1 is a linear operator whose domain is the space X of the generating fields and whose range is the space Y of the generated ones.

As the generating and generated models are analogous to each other, constrained and minimizing subsets can be considered in Y as well as in X. The fact that

the generated | compatibility / equilibrium | equations are exact

in the generating model implies that the B_1-images of isoconstrained elements in X are isoconstrained in Y.

The work principle, or some variational principle resulting from the work principle, is subsequently used

for deriving the generated | equilibrium / compatibility | equations.

An assumption is then introduced, like the Kirchhoff's assumption of the theory of shells, or the Bernouilli's assumption of the theory of rods, or the definition of the fields allowed within the elements in the finite element technique, which establishes a correspondence between the elements of Y and elements of X. A new linear operator, B_2, is thus introduced with domain Y and range X', X' being a subspace of X (the space of the allowed fields), and we write

$$x' = B_2 (y) \tag{3.2}$$

The | potential / complementary | energy method postulates

the invariance of the total | potential / complementary | energy.

This means that

$$T [B_2 (y)] = V (y) \quad \Big| \quad T^* [B_2 (y)] = V^* (y) \tag{3.3}$$

where | T and V / T* and V* | denote the total | potential / complementary |

energies in the generating and in the generated models, and permits to express the generalized elastic coefficients and external force defining magnitudes in terms of the generating ones [1].

According to what was written above and namely to equation (3.3), the linear operator

$$B = B_2 B_1 \tag{3.4}$$

with domain X and range X', which we call the interpolation, operator, enjoys the following properties:

i) the B-image of any element belonging to X' coincides with the element itself, i. e.,

$$B (x') = x' \qquad \text{if } x' \in X' \tag{3.5}$$

ii) Constrained and minimizing subsets meeting the same requirements as those in X can be defined in X', with respect to the same family of functionals, Φ.

iii) The B-images of isoconstrained elements in X are isoconstrained in X', although not necessarily in X.

If any two isoconstrained elements in X' are isoconstrained in X', operator B is said to be conforming.

The constrained subset C' which contains the B-images of the elements of a given constrained subset C of X is said to correspond to C. A given minimizing subset D' of X' is said to correspond to a certain minimizing subset D of X if they both correspond to the same functional φ.

A second operator, A, also with domain X and range X', can still be considered which makes the intersection of each constrained and each minimizing subset of X correspond to the intersection of the corresponding constrained and minimizing subsets of X'.

Operator A, called the approximation operator, is assumed bounded and continuous. The A-image x'_a of an element $x \in X$ is called the approximation of x in X'.

We remark that the A-images of any two isoconstrained elements in X are isoconstrained elements in X', and that the A-images of any two isominimizing elements in X are isominimizing elements in X'.

Consideration of operators A and B permits to discuss the conversion of a given variational problem into a new one, eventually simpler than the first and capable of providing an approximate solution to it.

If the interpolation operator B is chosen in such a way that X' is N-dimensional, then, the variational problem becomes particularly easy to solve, as functional φ becomes a function of N variables, and the element which minimizes the functional can be determined by just solving the system of N equations to N unknowns which results from equating to zero the derivatives of the function with respect to each variable. The problem is said to have been discretized. Of course, the equations will be linear only if functional φ is a quadratic function of the variables.

If operator B is conforming and $C' \subset C$, this discretization procedure is nothing else than the classical Ritz method. In the case of the finite element method, however, operator B is generally non-conforming.

4. *Justification by convergence*

The evolution of the modern Theory of Structures was deeply influenced by the finite element method, and it was namely in connexion with the finite element method that the role of convergence in the theory was fully appreciated.

The importance of convergence (to the exact solution) was truly realized by the finite element analysts

not earlier than 1965 [5]. Before 1965, indeed, too much stress was put upon conformity and monotonic convergence, so that the search for conforming elements was then a popular topic of research.

Later, if was realized that conformity is not strictly necessary and that it can even be inconvenient. The main theoretical reason for a given type of element being accepted is thus really its capacity for generating sequences of approximate solutions tending to the exact solutions of a sufficiently wide class of problems.

It cannot be forgotten however that, if conformity is violated, the finite element method, regarded as a variational technique or, more precisely, as a technique which provides an approximate solution to a variational problem consisting in minimizing a certain functional φ on a certain space C, by just minimizing φ on a space C' not generally contained in C, becomes distinct from Ritz's method, which supposes that C' is contained in C. The convergence theorems of the last [6] could not therefore be used with the former and a new convergence theory had to be built.

The generation of discrete models by the finite element technique being thus justified by convergence, it is natural that convergence considerations be made also for justifying the generation methods even if they are used for the generation of continuous models like the theory of shells. And this explains how the Theory of Structures can give answers to problem, like the one of the foundations of the theory of shells, which have been seen, until quite recently, exclusively from other points of view (see [7]).

The statement that the generation methods are justified by convergence requires some explanation, however, because, although it is clear what convergence means in the case of the finite element method, it seems less clear what it means in the case of the generation of the theory of shells, for instance.

Let us consider then the case of a shell and assume that its thickness is made smaller and smaller. What the convergence analysis is required to prove is that the two-dimensional (generated) solution becomes more and more near the corresponding three-dimensional (exact) solution as the shell becomes thinner and thinner, provided the relative values of the bending and membrane elastic coefficients (generated elastic coefficients) are not changed when the thickness tends to zero.

If such coefficients really do not change, then, the two-dimensional (generated) solution does not change also and what must be appreciated is the convergence of a sequence of generating (three-dimensional) solutions towards a generated one, and not, like in the finite element case, the convergence of a sequence of generated (approximate) solutions towards a generating (exact) one.

There remains to remark that the condition of unchangeability of the two-dimensional stiffness coefficients cannot be satisfied by an ordinary shell, in which the bending moments result merely from the ordinary stresses distributed in the thickness t, because, the bending stiffness coefficients being then proportional to t^3 and the membrane coefficients simply to t, the shell becomes more and more a membrane when the thickness tends to zero. But it can be satisfied if the shell is a generalized one, i. e., if non-vanishing couple--stresses are admitted to exist (see [7]).

Convergence analyses can be based in any case on an approximation theorem which states that the distance between an arbitrary element s in X, which minimizes φ on C, and its approximation in X', s'_a, satisfies the inequality

$$d(s, s'_a) \leqslant d(s_a, s'_a) + \sqrt{|\delta_s \varphi| + |\delta_a \varphi|} \tag{4.1}$$

where

$$\delta_s \varphi = \varphi(s') - \varphi(s) \tag{4.2}$$

$$\delta_a \varphi = \varphi(s'_a) - \varphi(s_a) \tag{4.3}$$

and s_a is isoconstrained with s and such that

$$s'_a = B(s_a) \tag{4.4}$$

Indeed, as s minimizes φ on C,

$$\varphi(s) \leqslant \varphi(s_a) \tag{4.5}$$

On the other hand, as s'_a is the aproximation of s in X', s'_a minimizes φ on C', so that

$$\varphi(s'_a) \leqslant \varphi(s') \tag{4.6}$$

Introducing (4.2) and (4.3) into (4.6), there results

$$\varphi(s_a) + \delta_s \varphi - \delta_a \varphi \leqslant \varphi(s) \tag{4.7}$$

Combination of (4.7) and (4.5) yields

$$\varphi(s_a) + \delta_s \varphi - \delta_a \varphi \leqslant \varphi(s) \leqslant \varphi(s_a) \tag{4.8}$$

Therefore,

$$\varphi(s_a) - \varphi(s) \leqslant |\delta_s \varphi| + |\delta_a \varphi| \tag{4.9}$$

On the other hand, (2.8) leads to

$$d^2(s, s_a) = \varphi(s_a) - \varphi(s) \tag{4.10}$$

so that inequality (4.9) can be transformed into

$$d(s, s_a) \leqslant \sqrt{|\delta_s \varphi| + |\delta_a \varphi|} \tag{4.11}$$

or, by virtue of the triangular inequality, into (4.1).

Let us apply the theorem to the case of Ritz's method in which $C' \subset C$. This means that s' and s'_a are isoconstrained with s and s_a. Then, as s'_a belongs to C, s_a can be identified with s'_a. (4.1) becomes therefore

$$d(s, s'_a) \leqslant \sqrt{|\delta_s \varphi|} \qquad (4.12)$$

On the other hand, as s is isocontrained with s'; (2.8) leads to

$$d^2(s, s') = \varphi(s') - \varphi(s) = \delta_s \varphi \qquad (4.13)$$

so that (4.12) yields

$$d(s, s'_a) \leqslant d(s, s') \qquad (4.14)$$

The approximation error is thus bounded by the interpolation error. In other words, as far as Ritz's method is concerned, completeness implies convergence.

Inequality (4.1) can be simplified if is is considered that $\left| \begin{matrix} \delta T \\ \delta T^* \end{matrix} \right|$ is the sum of two terms, one the order of the $\left| \begin{matrix} \text{strain} \\ \text{stress} \end{matrix} \right|$ variation modulus $\left| \begin{matrix} |\delta \underset{\sim}{e}| \\ |\delta \underset{\sim}{s}| \end{matrix} \right|$ and the other of the order of the $\left| \begin{matrix} \text{displacement} \\ \text{traction} \end{matrix} \right|$ variation modulus $\left| \begin{matrix} \delta \underset{\sim}{u} \\ \delta \underset{\sim}{p} \end{matrix} \right|$, i. e.,

$$\delta T = O(|\delta \underset{\sim}{e}|) + O(|\delta \underset{\sim}{u}|) \;\Big|\; \delta T^* = O(|\delta \underset{\sim}{s}|) + O(|\delta \underset{\sim}{p}|) \qquad (4.15)$$

On the other hand, by virtue of (2.5),

$$d(s, s'_a) = O(|\delta_a \underset{\sim}{e}|) \;\Big|\; d(s, s'_a) = O(|\delta_a \underset{\sim}{s}|) \qquad (4.16)$$

so that the first term in (4.1) can be neglected and (4.1) be transformed into

$$d^2(s, s'_a) \leqslant O(|\delta_s u|) + O(|\delta_s e|) + O(|\delta_a u|) + O(|\delta_a e|) \qquad (4.17)$$

Any convergence or accuracy analysis [7, 8] is thus reduced, according to the present theory, to two essential steps: a) the construction of a field s_a isoconstrained with s and interpolated by the aproximate solution, b) the evaluation of the order of $\delta \varphi$, i. e. of the variation of the functional associated with the interpolation error, both for the exact and for the aproximate solutions. As this evaluation is not always easy to make in connexion with the approximate solution, resorting to especial techniques like the so-called patch-test, becomes sometimes necessary [8].

5. *Conclusions*

It would not be fair finishing this paper on the applications of Functional Analysis to the Theory of Structures without referring Prager [9] and Synge's [10] pioneer work, as well as Mikhlin' book [6]. A more recent book by Oden [11] should also not be omitted.

In all such papers no attempt was made however to presenting the Theory of Structures, as a scheme of Mathematical Physics general enough to become a theoretical support not only to discretization but to the general problem of the generation of models from other models.

The theory of convergence contained in the scheme presented by the author can itself still be used outside structural analysis, in every case in which a minimum principle is known to exist. (see [12]).

REFERENCES

1 — OLIVEIRA, E. R. A. — «*The Convergence Theorems and their Role in the Theory of Structures*», in the Proc. IUTAM Symp. on High Computing of Elastic Structures (1970), Liège, 1971.

2 — OLIVEIRA, E. R. A. — «*Mathematical Theory of Linear Structures*», in «*Lectures on Finite Element Methods in Continuum Mechanics*», ed. by J. T. Oden and E. R. A. Oliveira, Un. of Alabama in Huntsville Press, 1973.

3 — OLIVEIRA, E. R. A. — «*Foundations of the Mathematical Theory of Structures*», Springer Verlag, Wien, 1975.

4 — OLIVEIRA, E. R. A. — «*A Theory of Variational Methods with Application to Finite Elements*», IST, Lisbon, 1972.

5 — BAZELEY, G. R.; CHEUNG, Y. K.; IRONS, B. M.; ZIENKIEWICZ, O. C. — «*Triangular Elements in Plate Bending. Conforming and Non-Conforming Solutions*», Proc. of the 1 st. Conf. on Matrix Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.

6 — MIKHLIN, S. G. — «*Variational Methods in Mathematical Physics*», Pergamon Press, Oxford, 1964.

7 — OLIVEIRA, E. R. A. — «*The Role of Convergence in the Theory of Shells*», Int. J. Sol. Struct., 10, pp. 531-553, 1974.

8 — OLIVEIRA, E. R. A. — *Results on the Convergence of the Finite Element Method in Structural and Non-Structural Cases*», Proc. of the Conf. on Finite Element Methods in Engineering, Sydney, 1974.

9 — PRAGER, W.; SYNGE, J. L. — «*Approximations in Elasticity Based on the Concept of Function Spaces*», Quart. Appl. Math., 5, pp. 241-269, 1947.

10 — SYNGE, J. L. — «*The Hypercircle Method in Mathematical Physics*», Cambridge Un. Press, Cambridge, 1957.

11 — ODEN, J. T. — «*Finite Elements of Non-Linear Continua*», Mc Graw-Hill, New York, 1972.

12 — OLIVEIRA, E. R. A. — «*Convergence of Finite Element Solutions in Viscous Flow Problems*», Int. J. Num. Meth. Eng., 9, pp. 739-763, 1975.

Equipamentos Brown Boveri por ondas dirigidas

destinados a transmissão dum canal de música ou de várias vias telefónicas simultâneas

Radiotelefones VHF/UHF

para a transmissão de um canal telefónico e/ou sinais de telecomando

Campos de aplicação:

Correios, telégrafos, telefones
Agências noticiárias
Empresas de electricidade, de gás, de águas, petrolíferas
Radiodifusão e televisão
Polícia, bombeiros e entidades oficiais
Caminhos de ferro, aviação e navegação
Indústria, construção e transportes

BROWN BOVERI

Representada em Portugal por:

Sociedade de Electricidade

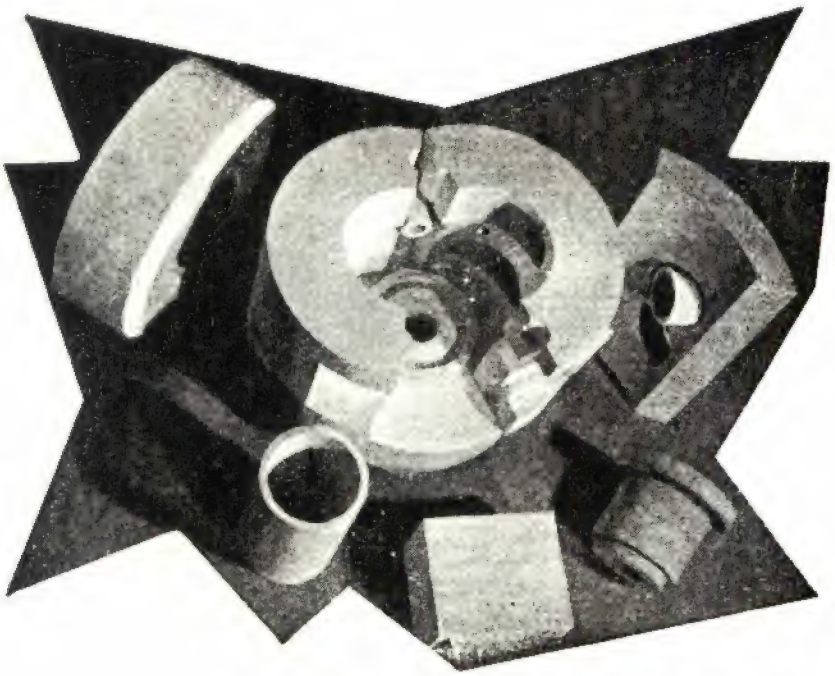
Brown Boveri Limitada

Rua de Sá da Bandeira, 481-2°, Porto

151660 a VI

a técnica moderna emprega

BETÕES REFRACTÁRIOS



à base dos cimentos

FONDU LAFARGE

e

SECAR 250

porque são

práticos
eficientes
económicos

REFRACTÁRIOS ATÉ 1800° C

REFRACTÁRIOS ISOLANTES ATÉ 1700° C

Os nossos serviços técnicos, especializados, estão à vossa inteira disposição para estudar, sem qualquer encargo da vossa parte, a adaptação dos BETÕES REFRACTÁRIOS a todos os vossos problemas

AGUIAR & MELLO L.DA

P. do Município, 13-1.º — LISBOA — Tel. 32 11 51/2

NÚMERO 435 OUTUBRO DE 1976 ANO LI VOLUME XXXVIII

C. D. U. 512

Programação Linear com Relevo para a Programação Linear Inteira e as Variáveis Booleanas

JOSÉ DE MATOS LOPES TEIXEIRA
Matemático
Assistente do I. S. T.

RESUMO

Este trabalho, resultante da reunião de dois temas por nós tratados no último ano da Licenciatura em Ciências Matemáticas, é dedicado acima de tudo à Programação Linear. Na sua Parte 1 cinge-se principalmente ao estudo, um tanto pormenorizado embora, do Método do Simplex e do Método do Simplex Dual tentando apoiá-los numa base matemática sólida e simultaneamente aplicá-los a alguns problemas simples de modo a completar a sua compreensão. Na Parte 2, aproveitando o estudo anterior, dedicamo-nos à Programação Linear Inteira debruçando-nos em particular sobre os algoritmos da Gomory e de Balas por nos parecerem de grandes possibilidades pela enorme gama de problemas que podem enfrentar. E a natureza do segundo algoritmo levou-nos a um tratamento especial de transformação de variáveis inteiras em variáveis booleanas. Programamos ainda estes algoritmos na linguagem A.P.L. apresentando de seguida as listagens de alguns problemas simples resolvidos pelo computador.

ABSTRACT

This work is a resultant of two former papers which have been prepared as a part of the requirements for the graduation in mathematics and deals with Linear Programming. Part 1 is mainly a study, with certain details, of the simplex and the dual simplex methods, seen from the point of view of a rigorous mathematical approach aiming at the same time to apply them to simple problems in order to get a good understanding. On the basis of the theory previously developed, Part 2 deals with Integer Linear Programming, with a special enphasis on the algorithms of Gomory and Balas which proved to be of particular interest because of their extreme versatility to attach concrete problems. The nature of second algorithm has led to the usage of boolean variables instead of integer variables. Both algorithms have been coded in A.P.L.; as a part of the work we also show listings of the outputs of some easy problems solved on a computer.

PREFÁCIO

O trabalho que se apresenta resulta da reunião de dois outros trabalhos de títulos originais «Programação Linear com Relevância para o Método do Simplex» e «Programação Linear Inteira e as Variáveis Booleanas», tratados respectivamente no Seminário e Estágio do 5.º ano da licenciatura em Ciências Matemáticas na Universidade de Luanda em 74/75. E ocorreu-nos tal reunião pelo facto do primeiro ter sido desenvolvido de maneira a possibilitar um mais fácil acesso aos tópicos escolhidos em Programação Linear Inteira. De qualquer modo, talvez para respeitar os títulos originais, dividimos este trabalho em duas partes.

Na Parte 1, que engloba os primeiros quatro capítulos procurámos fazer um estudo tanto quanto possível exaustivo do conhecido Método do Simplex e do Método do Simplex Dual pela capacidade que estes métodos encerram de resolver numerosíssimos problemas de aplicação aos mais variados campos e ainda pela necessidade de dominar perfeitamente estes dois métodos para poder abordar com êxito a Programação Linear Inteira. Foi nosso objectivo basear os algoritmos dos Métodos referidos em verdades matemáticas perfeitamente comprovadas e por outro lado apresentá-los esquematicamente no sentido de tornar possível enfrentar de imediato alguns problemas cuja resolução apresentamos com certa riqueza de pormenor.

Na Parte 2, constituída pelos capítulos 5, 6 e 7, enveredou-se então pela Programação Linear Inteira que de resto se desenvolveu à custa das limitações encontradas no Método do Simplex criando variados algoritmos. Pareceu-nos contudo aconselhável tratar exclusivamente os algoritmos de Gomory e de Balas que programámos em linguagem A.P.L. Apresentamos também a listagem pelo computador dos sucessivos cálculos para cada exemplo tratado e incluímos também um certo tratamento da transformação de variáveis inteiras em variáveis booleanas.

Uma palavra de agradecimento sincero para o senhor Prof. Dr. J. Marques Henriques que nos orientou e entusiasmou a tratar da Programação Linear, Geral e Inteira, destacando aqui a importância das variáveis booleanas.

Lisboa, 14 de Fevereiro de 1975

SUMÁRIO

PARTE I

Capítulo 1 Introdução à Programação Linear.
1.1. Nascimento e Limites Actuais da Programação Linear e não-Linear.
1.2. Considerações Gerais e Notações.

Capítulo 2 Desenvolvimento do Método do Simplex.
2.1. Solução Admissível Inicial.
2.2. Geração de Soluções de Ponto Extremo e Procura da Solução Mínima.
2.3. Fenómeno de Degenerescência e Técnica de Saída.
2.4. Referências ao Método do Simplex Revisto.

Capítulo 3 Dualidade.
3.1. Generalidades.
3.2. Teorema da Dualidade.
3.3. Algoritmo do Método do Simplex Dual.

Capítulo 4 Aplicação Prática.
4.1. Esquematização dos Algoritmos.
4.2. Problemas Resolvidos.

PARTE II

Capítulo 5 Programação Linear Inteira.
5.1. Introdução.
5.2. Aplicações e Modelos.

Capítulo 6 Algoritmo de Gomory e sua Programação em A.P.L.
6.1. Generalidades.
6.2. Escolha do Plano de Corte.
6.3 Selecção de λ.
6.4. Esquematização do Algoritmo.
6.5. Exemplo Resolvido.
6.6. Programação do Algoritmo de Gomoy.

Capítulo 7 Variáveis Booleanas e Algoritmo de Balas.
7.1. Transformação de Variáveis Inteiras em Variáveis Booleanas.
7.2. Métodos de Enumeração Implícita.
7.3. Algoritmo de Balas.
7.4. Exemplo Resolvido.
7.5. Programação do Algoritmo de Balas em A.P.L.

PARTE I

Capítulo 1

INTRODUÇÃO À PROGRAMAÇÃO LINEAR

1.1. — *Nascimento e Limites Actuais da Programação Linear e não-Linear.*

Quando um responsável por qualquer actividade coordena todas as suas tarefas, limitações e interligações possíveis de modo a obter o máximo proveito, está na realidade perante um problema de Programação Matemática. Mas para ele ser resolvido com êxito torna-se necessário traduzi-lo por expressões matemáticas e determinar um processo de encontrar o objectivo em vista, isto é, formar o modelo matemático que sintetize o problema em causa.

Foram sobretudo as questões de índole económica e militar pela grande quantidade de factores em jogo, que fizeram avançar este importante ramo da Matemática. Embora já do século XVIII sejam conhecidos modelos de Programação Linear como o «TABLEAU ECONOMIQUE» de Quesnay que tentava equacionar as relações de produção entre os proprietários agrícolas, foi em 1936 que Leontief com o seu método de análise das tabelas de «input-output» baseado na ideia de que uma grande proporção do esforço da Economia Moderna se dedica à produção de produtos intermédios e que a produção destes produtos intermédios tem por sua vez grande influência na produção de produtos finais, que se deu o verdadeiro arranque.

Mas o criador da Programação Linear foi George B. Dantzig que em 1947 apresentou uma técnica para planificar as diversas actividades da Força Aérea dos Estados Unidos. Esta técnica tem bastantes semelhanças com o método de Leontief pois analisa as relações que as diversas actividades de rectaguarda têm com o objectivo final, relações análogas às existentes entre os produtos finais e a produção dos sectores intermédios no método de Leontief. Mas a inovação de Dantzig foi conseguir um método para decidir qual dos vários planos que satisfazem os objectivos finais é o melhor, portanto um método de optimização. Também em 1947, T. Koopmans desenvolveu estes métodos aplicando-os ao chamado «Problema de Transportes».

A Programação Linear, como o nome indica, debruça-se sobre problemas em que as suas restrições ou relações são da forma: $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b$, onde os a_i e b são coeficientes conhecidos e os x_i são variáveis a calcular.

Parece que foi Tourier o primeiro a estudar sistemas de desigualdades lineares tendo realçado a importância desse estudo na Teoria das Probalidades.

O verdadeiro início do cálculo da Programação Linear começou com a publicação do «Método do Simplex» por Dantzig de parceria com Leonid Hurwicz e Koopmans. Actualmente as aplicações de Programação Linear estendem-se a todas as categorias de actividades industriais, comerciais e governamentais e a versatilidade e capacidade do modelo de Programação Linear parece não ter limites. Mas até os primeiros investigadores lhe reconheceram certas limitações e assim se começaram a desenvolver bases teóricas e processos de cálculo para certos problemas especiais de Programação não-Linear, isto é, problemas onde as restrições já não são do tipo anterior, rectas, planos ou hiper-planos, como por exemplo:

minimize a função $f(x_1, x_2) = -\log x_1 - \log x_2$ sujeita à restrição $x_1 + x_2 \leqslant 2$, onde x_1 e x_2 são logicamente não-negativos.

A partir de 1950 um grande número de investigadores (matemáticos e economistas) dedicaram-se ao desenvolvimento das diferentes ramificações da Programação Linear: Programação Quadrática, Programação Estocástica, Programação Separável e Programação Linear com variáveis inteiras onde desempenham um grande papel as variáveis booleanas nos métodos de «Enumeração Implícita». Os domínios de aplicação multiplicam-se e a dimensão dos problemas resolúveis aumenta rapidamente provocando o interesse crescente dos especialistas de organismos públicos e privados e das Empresas Industriais e Comerciais. Claro que muito deste interesse provém da utilização de computadores cada vez mais poderosos permitindo a resolução de problemas de até vários milhares de restrições.

As possibilidades abertas pelos problemas de Programação Linear com variáveis inteiras (P.L.I.) ou «mistas» (isto é, problemas onde todas ou uma parte das variáveis devem ser obrigatoriamente inteiras), são de tal modo vastas que várias equipas americanas e europeias a eles se dedicam na preparação e desenvolvimento de algoritmos cada vez mais eficientes.

1.2. — *Considerações gerais e Notações.*

Num problema de Programação Linear procura-se uma repartição mais eficaz dos recursos disponíveis tendo em vista certo objectivo. Imaginemos uma empresa que se dedica às actividades $x_1, x_2, \ldots, x_n$, estando os investimentos, as despesas de armazenagem, as horas de trabalho, o consumo de energia limitados respectivamente às quantidades ou valores $b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots$ etc. Podem determinar-se na empresa os investimentos $a_{1,j}$, os custos de armazenagem $a_{2,j}$, os tempos gastos $a_{3,j}$, os consumos de energia $a_{4,j}, \ldots$, etc., para cada unidade produzida pelas diversas actividades x_j. Depois de calculados os lucros unitários c_j para cada actividade, podemos então formular o problema:

Maximizar o lucro $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$

sujeito às restrições

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n &\leqslant b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n &\leqslant b_2 \\ \text{— — — — — —} \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n &\leqslant b_m \end{aligned}$$

e com $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$

Suponha-se agora que um ourives produz dois tipos de anéis, A e B, usando ouro e prata em doses variáveis. Consome três gramas de prata e um de ouro no tipo A; dois de prata e dois de ouro no tipo B. Sabendo que só possui 52 grs. de prata e 28 grs. de ouro e que além disso o lucro por anel do tipo A é de três unidades e do tipo B é de 4 unidades, calcular qual o número ideal de cada tipo de anéis que o ourives deve fazer de modo a maximizar o seu lucro.

Sejam x_1 e x_2 os números de anéis a produzir, respectivamente dos tipos A e B. Teremos

Maximize $Z = 3x_1 + 4x_2$

sujeita a

$$x_1 + 2x_2 \leqslant 28 \quad \text{e} \quad x_1, x_2 \leqslant 0$$

$$3x_1 + 2x_2 \leqslant 52$$

cuja solução, determinada pelo Método do Simplex (ver 4.2., 5.º) é $x_1 = 12$ e $x_2 = 8$ com $Z = 3 \times 12 + 4 \times \times 8 = 98$

Podemos então dizer que em Programação Linear o problema consiste na procura do vector $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que extreme uma função

$$f(X) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

de valor real definida no espaço n-dimensional e linear, a qual recebe o nome de função objectivo, e que simultaneamente satisfaça as restrições igualmente lienares:

$$x_j \geqslant 0 \quad \text{para} \quad j = 1, 2, \ldots, n \qquad (1.1)$$

e

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ \text{— — — — — — — —} \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n &= b_n \end{aligned} \qquad (1.2)$$

em que o vector linha $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in R^n$, cujas componentes são chamadas coeficientes de custo, o vector coluna $b = (b_1, b_2, \ldots b_m) \in R^m$ e as componentes a_{ij} são constantes reais dadas (com $m < n$)

Por vezes escrever-se-á apenas:

Minimize $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ sujeita a $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$, $x_j \geqslant 0$

e com $(i = 1, 2, \ldots, m)$; $(j = 1, 2, \ldots, n)$

ou ainda mais sinteticamente

Minimize cX sujeita a $AX = b$ e $X \geqslant 0$

onde X e 0 são vectores coluna n-dimensionais, 0 com componentes todas nulas.

NOTA: Para facilidade de expressão substituir-se-ão por vezes as componentes a_{ij} da matriz A por $x_{i,j}$, os vectores coluna da mesma matriz por P_j e o vector coluna b por P_0, isto é, a restrição $AX = b$ passará a ser substituída por:

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \ldots + x_n P_n = P_0$$

Convém agora recordar algumas definições e teoremas de grande importância na sequência deste trabalho:

Definição 1 Chama-se solução admissível dum problema de Programação Linear ao vector $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que satisfaça as condições (1.1) e (1.2).

Definição 2 Chama-se solução básica admissível à solução de componentes não negativas obtida, fazendo n-m variáveis iguais a zero, para as m variáveis restantes, quando os seus coeficientes não formem determinante nulo.

Definição 3 Chama-se solução optimal à solução admissível que minimize ou maximize a função objectivo.

Definição 4 Chama-se combinação convexa dos pontos $y_1, y_2, \ldots, y_n \in E^m$ ao ponto $Y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n$ com α_i escalares não negativos e tais que

$$\sum_{i}^{n} \alpha_i = 1$$

Definição 5 Um conjunto $C \in E^m$ é convexo se e só se para todos os pares de pontos y_1 e y_2, a sua combinação convexa $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ também pertence a esse conjunto.

Definição 6 Um ponto dum conjunto convexo diz-se ponto extremo se não for possível exprimi-lo como combinação convexa de quaisquer outros dois pontos distintos.

Definição 7 Chama-se ambiente convexo C(S) de qualquer conjunto S dado de pontos, ao conjunto de todas as combinações convexas dos pontos de S.

Definição 8 Chama-se poliedro convexo ao ambiente convexo do conjunto S formado por um número finito de pontos.

Definição 9 Um Simplex é um poliedro no espaço a n-dimensões e que tem exactamente n + 1 vértices. As fronteiras de um Simplex contêm ainda outros Simplex de menor dimensão.

Teorema 1 O conjunto das soluções admissíveis dum problema de Programação Linear é fechado, ou $M = \{X : X \in R^n, X \geqslant 0, AX = b\}$ é fechado.

Teorema 2 O conjunto das soluções admissíveis é um conjunto convexo e tem um número finito de pontos extremos.

Teorema 3 A função objectivo alcança o seu mínimo num canto do conjunto convexo M formado por todas as soluções admissíveis.

Teorema 4 Se M é não vazio e limitado, a função objectivo tem mínimo e assume-o em pelo menos um dos seus cantos.

Teorema 5 Se M não é limitado mas se a função objectivo possui mínimo, esse mínimo é atingido pelo menos num dos seus cantos.

Teorema 6 A solução $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é um canto de M se e só se as x_j componentes positivas são coeficientes de vectores linearmente independentes P_j em número de m em:

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \ldots + x_n P_n = P_0$$

NOTA: Estes teoremas são de importância fundamental; contudo a fim de não alongar demasiado este trabalho não são apresentadas aqui as demonstrações que podem ser lidas no livro de Saul J. Gass, Programacion Lineal, Capítulo 3.

Analisando bem o conteúdo destas definições e teoremas podemos seguir um raciocínio semelhante àquele que levou G. B. Dantzig ao Método do Simplex e que vai ser motivo de particular interesse neste trabalho:

a) A função objectivo toma o seu mínimo num pelo menos dos cantos de M.

b) A cada canto de M estão associados m vectores linearmente independentes do conjunto dos n vectores dados.

c) As soluções do problema são cantos e há tantos como $\binom{n}{m}$ maneiras de obter conjuntos de m vectores linearmente independentes.

d) Se m e n são pequenos não haverá muitas soluções a analisar mas o vulgar é serem m e n números bastante grandes o que obriga a seguir um método que de algum modo nos leve à solução óptima. Um desses métodos e o mais eficaz é o Método do Simplex que consiste sumariamente no seguinte:

1.º Determina-se uma solução de ponto extremo a partir de um conjunto de m vectores linearmente independentes e, por aplicação do teorema 8, (ver 2.2.2), verifica-se se esta solução minimiza a função objectivo.

2.º Se não a minimiza determina-se uma outra solução de ponto extremo vizinho, isto é, ligado ao anterior por uma fronteira do poliedro convexo, e que dê à função objectivo um valor inferior ao anterior.

3.º O trabalho da alínea anterior repete-se um certo número de vezes e geralmente entre m e 2m vezes. Termina o processo quando se atinge o mínimo.

Capítulo 2

DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO DO SIMPLEX

2.1 — Solução Admissível Inicial.

Ao ser-nos dado um problema de Programação Linear as suas restrições podem apresentar um dos quatro seguintes aspectos:

1.° O modelo matemático é da forma

$$AX = b \quad \text{com} \quad b \geqslant 0 \quad \text{e} \quad m < n$$

em que se supõe que pelo menos uma $b_i > 0$ e temos as duas situações seguintes:

a) A matriz A não contém vectores colunas unitárias e então inicia-se o cálculo com m vectores artificiais, técnica esta chamada de «base artificial». Ora o problema geral de Programação linear é:

minimize $\quad c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$

sujeita a $\quad a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \quad e \quad x_j \geqslant 0$

$$a_{21} x_1 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2$$

$$a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mn} x_n = b_n$$

e então dentro desta técnica aumentamos o sistema para:

minimize

$$c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n + wx_{n+1} + wx_{n+2} + \ldots + wx_{n+m}$$

sujeita a

$$a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n + x_{n+1} = b_1$$

$$a_{21} x_1 + \ldots + a_{2n} x_n + x_{n+2} = b_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mn} x_n + x_{n+m} = b_m$$

e ainda $x_j \geqslant 0$ para $j = 1, 2, \ldots, n+m$.

em que w representa qualquer quantidade suficientemente grande que nada altera por as variáveis correspondentes acabarem por se anularem. Assim os m vectores $P_{n+1}, P_{n+2}, \ldots, P_{n+m}$ formam uma base (artificial) para este problema aumentado e se o problema inicial tem solução óptima, o problema ampliado também a terá e a própria estrutura do Método do Simplex garante que seja impossível aparecer uma das variáveis x_{n+i} com um valor positivo. Se o problema original não é possível, então a solução do problema aumentado apresentará uma variável $x_{n+i} > 0$.

b) A matriz A contém k vectores unitários distintos e então acrescentar-se-ão $m - k$ vectores artificiais e aplica-se o número anterior.

2.° O modelo matemático é da forma

$$AX \leqslant b \quad \text{com} \quad b \geqslant 0$$

Neste caso transformamos cada desigualdade numa igualdade acrescentando a cada linha um variável não negativa chamada «variável de folga» e que faz aparecer uma base de m sectores unitários $P_{n+1}, P_{n+2}, \ldots, P_{n+m}$, para iniciar o processo:

$$a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n \leqslant b_1$$

$$a_{21} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \leqslant b_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mn} x_n \leqslant b_m$$

passa a

$$a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n + x_{n+1} = b_1$$

$$a_{21} x_1 + \ldots + a_{2n} x_n + x_{n+2} = b_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{m1} x_1 + \ldots + a_{m2} x_2 + x_{m+n} = b$$

3.° Se for da forma

$$AX \geqslant 0 \quad \text{com} \quad b \geqslant 0$$

podemos igualmente transformar cada inequação em igualdade como na alínea anterior mas desta vez aparece-nos um conjunto de m vectores unitários negativos, ou seja $A X - \overline{X} = b$ com $\overline{X} = (x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m})$ um vector coluna não negativo, o que nos obriga a um segundo artifício para encontrarmos os m vectores unitários positivos. Transformamos $A X - \overline{X} = b$ da seguinte maneira:

$a'_{ij} = -a_{ij} + a_{sj} \ldots$ para $i \neq s$, $j = 1, 2, \ldots, n+m$

$a'_{sj} = a_{sj} \qquad j = 1, 2, \ldots, n+m$

$b'_i = -b_i + b_s \ldots$ para $i \neq s$ e sendo s o índice de $\max_i b_i$

$b'_s = b_s$

ou seja, determinamos $\max b_i = b_s$ e somamos a s-ésima fila à simétrica de cada uma das outras o que fará aparecer apenas $m - 1$ vectores unitários positivos e que serão completados com um vector artificial correspondente à s-ésima variável pelo processo 1.° a). Vejamos o exemplo:

$$\begin{array}{lll}
x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 1 & & x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\
2x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 0 & \rightarrow & 2x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 0 \rightarrow \\
x_1 + x_2 - x_3 \geqslant 2 & & x_1 + x_2 - x_3 - x_6 = 2
\end{array}$$

$$2x_2 - 4x_3 + x_4 - x_6 = 1$$

$$\rightarrow -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_5 - x_6 = 2$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_6 = 2$$

e aplicávamos ao último sistema o processo de 1.° a).

4.° Um último caso possível é aquele em que aparecem misturadas equações e tipos diferentes de desigualdades:

$A X \gtrless b$ com b sem qualquer restrição

onde por manipulações apropriadas dos números anteriores se podem fazer surgir os m vectores unitários.

2.2. — Geração de Soluções de Ponto Extremo e Procura da Solução Mínima.

2.2.1. — Geração de Soluções.

Após a aplicação de algumas das alíneas anteriores, o que não é necessário se a matriz do problema

apresentar em evidência o conjunto de m vectores linearmente independentes podemos iniciar o método:

Suponhamos que o conjunto dos m vectores P_j linearmente independentes são os primeiros m. Então o vector solução inicial, ponto extremo, será:

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) \text{ com } x_i \geq 0 \quad \text{e}$$

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \ldots + x_n P_n = P_o \qquad (2.1)$$

como nos garantem os teoremas anteriormente enunciados. Sendo $P_1, \ldots, P_m$ linearmente independentes podemos exprimir como combinação linear deles, qualquer um dos n vectores dados.

$$P_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} P_i \text{ para } j = 1, 2, \ldots, n$$

e onde $x_{ij} = a_{ij}$ conforme ficou assente na nota de (1.2). Suponhamos agora que P_k com $k > m$ é um dos vectores que não se encontra na base e que tem pelo menos uma componente $x_{i,k} > 0$ na expressão:

$$P_k = x_{1,k} P_1 + x_{2,k} P_2 + \ldots + x_{m,k} P_m \qquad (2.2)$$

Multiplicando esta igualdade por um número qualquer θ e subtraindo-a membro a membro de 2.1), vem:

$$(x_1 - \theta x_{1,k}) P_1 + (x_2 - \theta x_{2,k}) P_2 + \ldots +$$
$$+ (x_m - \theta x_{m,k}) P_m + \theta P_k = P_o$$

e o vector $X' = (x_1 - \theta x_{1,k}, x_2 - \theta x_{2,k}, \ldots, x_m - \theta x_{m,k}$

é uma solução possível se todas as suas componentes forem não negativas, o que sucede se fizermos $\theta > 0$, que ainda obriga a ser $X' \neq X$. Como algumas das $x_{i,k}$ podem ser não positivas vamos seleccionar $\theta > 0$ tal que

$$x_i - \theta x_{i,k} \geq 0 \text{ ou } \theta \leq x_i / x_{i,k} \text{ para todas as } x_{i,k} > 0$$

Ora qualquer θ que satisfaça

$$0 < \theta \leq \min_i \frac{x_i}{x_{i,k}}$$

daria uma nova solução possível X' com m + 1 componentes positivas. Mas como queremos atingir uma nova solução de ponto extremo, atendendo ao teorema 6, não podemos ter mais de m componentes positivas, e teremos de escolher um θ dentro daquele intervalo mas que anule uma das m + 1 componentes. E se escolhermos precisamente

$$\theta_o = \min_i \frac{x_i}{x_{i,k}} = \theta$$

vê-se imediatamente que se anula a componente de X' fornecedora desse mínimo. Admitamos que ela é a primeira componente: $\theta_o = x_1 / x_{1,k}$, então fazendo

$$x'_i = x_i - \theta_o x_{i,k} \quad \text{para} \quad (i = 2, 3, \ldots, m) \quad \text{e}$$

$$x'_{m+1} = \theta_o \quad \text{além de} \quad P_k = P_{m+1}$$

temos

$$x'_2 P_2 + x'_3 P_3 + \ldots + x'_m P_m + x'_{m+1} P_{m+1} = P_o$$

Claro que se todas as $x_{i,k}$ fossem não positivas, não conseguíamos determinar um θ que anulasse uma das m + 1 componentes e obteríamos apenas uma solução possível associada com os vectores $P_1, P_2, \ldots, P_{m+1}$ e isto indicaria que o problema não teria solução mínima finita como veremos em estudos seguintes. Mas para se afirmar que $X' = (x'_2, x'_3, \ldots, x'_{m+1})$ é ponto extremo ainda falta provar: «os vectores associados $P_2, P_3, \ldots, P_{m+1}$ são linearmente independentes»:

Demonstração: Admitamos que eram linearmente dependentes. Então

$$d_2 P_2 + d_3 P_3 + \ldots + d_m P_m + d_{m+1} P_{m+1} = 0$$

onde nem todos os números d_i são nulos. Ora $P_2, P_3, \ldots P_m$ são linearmente independentes porque é um subconjunto de $P_1, P_2, \ldots, P_m$ linearmente independentes por hipótese e isto obriga a ser $d_{m+1} \neq 0$. Assim, pondo $l_i = -d_i / d_{m+1}$, virá a igualdade:

$$P_{m+1} = e_2 P_2 + e_3 P_3 + \ldots + e_m P_m$$

que subtraída da $P_{m+1} = P_k = x_{1,k} P_1 + x_{2,k} P_2 + \ldots +$
$+ x_{m,k} P_k$

anterior dá:

$$x_{1,k} P_1 + (x_{2,k} - e_2) P_2 + (x_{3,k} - e_3) P_3 +$$
$$+ \ldots + (x_{m,k} - e_m) P_m = 0$$

em que todos os coeficientes dos vectores terão de ser nulos por serem estes independentes, o que não sucede para $x_{1,k}$ que se supõe positiva. Logo concluímos que $P_2, P_3, \ldots, P_m$ são linearmente independentes e X' é solução de ponto extremo.

Assim com o vector P_o se encontra em função da nova base, temos de exprimir também todos os outros vectores $P_1, P_2, \ldots, P_n$ em função da nova base que já não inclui o vector P_1. Ora de (2.2), ou seja

$$P_k = x_{1,k} P_1 + x_{2,k} P_2 + \ldots + x_{m,k} P_m, \text{ sai}$$

$$P_1 = \frac{1}{x_{1,k}} \left(P_k - x_{2,k} P_2 - \ldots - x_{m,k} P_m \right)$$

Então para qualquer vector P_j que não esteja na base original, ou seja

$$P_j = x_{1j} P_1 + x_{2j} P_2 + \ldots + x_{mj} P_m, \text{ vem}$$

$$P_j = \frac{x_{1j}}{x_{1,k}} P_k + \left(x_{2,j} - \frac{x_{1,j}}{x_{1,k}} x_{2,k}\right) P_2 +$$

$$+ \ldots + (x_{m,j} - \frac{x_{1,j}}{x_{1,k}} x_{m,k}) P_m$$

para ($j \neq k$, 2, 3, ..., m), semelhante a $P_o = \theta P_k +$

$$+ (x_2 - \theta x_{2,k}) P_2 + (x_3 - \theta x_{3k}) P_3 + \ldots +$$

$$+ (x_m - \theta x_{m,k}) P_m .$$

Agora dispomos duma outra solução de ponto extremo associada a outra base e em função da qual estão expressos todos os outros vectores. Podemos novamente fazer entrar na base um outro vector e obter outra base e nova solução e assim sucessivamente até à solução óptima se ela existir.

A importância dos coeficientes da expressão de P anterior justifica a seguinte:

NOTA: Vê-se que é passagem fundamental do Método do Simplex ir exprimindo todos os vectores P_j em função da nova base. Suponhamos então que a base inicial é $(P_1, P_2, \ldots, P_m) = I_m$ (vectores unitários). Podemos exprimir todos os outros vectores em termos desta base, que serão:

$$P_o = x_{1,o} P_1 + \ldots + x_{l,o} P_l + \ldots + x_{m,o} P_m$$

$$P_k = x_{1,k} P_1 + \ldots + x_{l,k} P_l + \ldots + x_{m,k} P_m$$

. . . . . .

$$P_j = x_{1,j} P_1 + \ldots + x_{l,j} P_l + \ldots + x_{m,j} P_m$$

Mas se agora se concluir que deve entrar na base o vector P_k e sair o vector P_l, da expressão de P_k, temos:

$$P_l = \frac{1}{x_{l,k}} P_k - \frac{x_{1,k}}{x_{l,k}} P_1 - \ldots - \frac{x_{m,k}}{x_{l,k}} P_m$$

e substituindo este vector P_l em P_o, ..., P_k, ..., P_j, ..., P_n, vectores não incluídos na nova base, vem:

$$P_o = (x_{1,o} - \frac{x_{l,o}}{x_{l,k}} x_{1,k}) P_1 + (x_{2,o} - \frac{x_{l,o}}{x_{l,o}} x_{2,k}) P_2 + \ldots +$$

$$+ \frac{x_{l,o}}{x_{l,k}} P_k + \ldots + (x_{m,o} - \frac{x_{l,o}}{x_{l,k}} x_{m,k}) P_m$$

. . . . . .

(continua na coluna seguinte)

$$P_j = (x_{1,j} - \frac{x_{l,j}}{x_{l,k}} x_{1,k}) P_1 + (x_{2,j} - \frac{x_{l,j}}{x_{l,k}} x_{2,k}) P_2 +$$

$$+ \ldots + \frac{x_{l,j}}{x_{l,k}} P_k + \ldots + (x_{m,j} - \frac{x_{l,j}}{x_{l,k}} x_{m,k}) P_m$$

em que P_o é a nova solução (vector coluna) e P_j os outros vectores coluna do novo quadro (veja-se exemplo final). E temos então:

$$\begin{cases} x'_{i,j} = x_{i,j} - \dfrac{x_{l,j}}{x_{l,k}} x_{i,k} & \text{para } i \neq l \\ x'_{k\,j} = \dfrac{x_{l,j}}{x_{l,k}} \end{cases}$$

que são chamadas «FÓRMULAS DE ELIMINAÇÃO COMPLETA» que nos permitem obter a nova solução e as novas representações dos vectores que não se encontram na base.

2.2.2 — Procura da Solução Mínima.

Temos então uma solução inicial $X_o = (x_{1,o}, x_{2,o}, \ldots, x_{m,o})$ e o correspondente conjunto de vectores linearmente independentes $P_1, P_2, \ldots, P_m$, isto é

$$x_{1,o} P_1 + x_{2,o} P_2 + \ldots + x_{m,o} P_m = P_o \qquad (2.3)$$

e $x_{1,o} c_1 + x_{2,o} c_2 + \ldots + x_{m,o} c_o = Z_o$ ou $P_o c = Z_o$ (2.4)

onde Z_o é o valor da função objectivo, $c_1, c_2, \ldots, c_m$ são os coeficientes de custo e $x_{i,o} > 0$. Expressando cada vector P_j em termos da base $P_1, P_2, \ldots, P_m$, ou

$$P_j = x_{1,j} P_1 + x_{2,j} P_2 + \ldots + x_{m,j} P_{m,j} \text{ com } j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (2.5)$$

definimos então

$$Z_j = x_{1,j} c_1 + x_{2,j} c_2 + \ldots + x_{m,j} c_m \quad \text{com } j = 1, 2, \ldots, n \qquad (2.6)$$

onde cada c_j é o coeficiente de cada P_j da base.

Para melhor compreensão de notações e melhor transposição para a prática, apresentada no final do trabalho, convém observar o seguinte quadro (semelhante aos usados na prática manual):

n.º da linha	base inicial	Coefici. básicos	Solução inicial	c_1	c_2	.	.	c_m	c_{m+1}	.	c_k	.	c_n	zeros ou w (coeficientes artificiais)		
i	B	c	P_o	P_1	P_2	.	.	P_m	P_{m+1}	.	P_k	.	P_n	P_{n+1}		P_{n+m+1}
1	P_1	c_1	$x_{1,o}$	1	0	.	.	0	$x_{1,m+1}$		$x_{1,k}$		$x_{1,n}$	1	0	0
2	P_2	c_2	$x_{2,o}$	0	1	.	.	0	$x_{2,m+1}$		$x_{2,k}$		$x_{2,n}$	0	0	0
3	P_3	c_3	$x_{3,o}$	0	0	.	.	0	$x_{3,m+1}$		$x_{3,k}$		$x_{3,n}$	0	1	0
.	.	.	.	.	.	.	.		.		.		.	.	(ou (−1))	
.	.	.	.	.	.	.	.		.		.		.	.		
m	P_m	c_m	$x_{m,o}$	0	0	.	.	1	$x_{m,m+1}$		$x_{m,k}$		$x_{m,n}$	0	0	1
m + 1			Z_o	0	0	.	.	0	$z_{m+1} - c_{m+1}$		$z_u - c_n$		$z_n - c_n$	0	0	0

e assim podemos enfrentar melhor os seguintes teoremas:

Teorema 7: *Se $Z_j - c_j > 0$ para alguma coluna j, então existem outras soluções tais que os correspondentes valores Z da função objectiva são tais que $Z < Z_o$, onde o limite inferior de Z pode ser finito ou infinito.*

Demonstração: Como vimos, multiplicando a igualdade (2.5) por θ e subtraindo-a de (2.3) obtemos uma nova solução de ponto extremo no caso de alguma $x_{i,j} > 0$ em (2.5), pois assim θ passa a $\theta_o = \min_i (x_{i,o} / x_{i,j})$ que anula uma das m + 1 componentes da nova solução

$$P_o = (x_{1,o} - \theta x_{1,j}) P_1 + \ldots + (x_{m,o} - \theta x_m) P_m + \theta P$$

cujo correspondente valor Z da função objectivo será:

$$(x_{1,o} - \theta x_{1,j}) c_1 + \ldots + (x_{m,o} - \theta x_{m,j}) c_m + \theta c_j =$$

$$= x_{1,o} c_1 + \ldots + x_{m,o} c_m -$$

$$- \theta (x_{1,j} c_1 + \ldots + x_{m,j}) + \theta c_j =$$

$$= Z_o - \theta Z_j + \theta c_j = Z_o - \theta (Z_j - c_j)$$

ou seja

$$Z = Z_o - \theta (Z_j - c_j)$$

mas como $\theta > 0$ e por hipótese $Z_j - c_j > 0$, virá $Z < Z_o$. Claro que nas condições postas, para alguma $x_{i,j} > 0$, $\theta = \theta_o$ será finito e portanto Z terá um limite inferior finito; se pelo contrário todas as $x_{i,j} \leqslant 0$, então θ não terá limite superior e portanto $Z \to -\infty$ e neste caso para qualquer $\theta > 0$ obtém-se uma solução com m + 1 componentes e logo não extrema.

Mas o que nos interessa é que sendo $x_{i,j}$, do vector coluna P_j a entrar na base, maior que zero, se obtém nova solução de ponto extremo e nova base, à qual corresponde $Z < Z_o$. Esta nova base pode ser usada como a anterior e se novamente existir um valor $Z_j - c_j > 0$ e uma correspondente $x_{i,j} > 0$, encontrar-se-á para a função objectivo um valor $Z' < Z$ e assim sucessivamente.

Quando termina o processo? O teorema seguinte responde a esta pergunta e isso verifica-se quando todos os valores da m + 1 – ésima linha, $Z_j - c_j$, forem não positivos ou quando para algum $Z_j - c_j > 0$ se tenha $x_{i,j} \leqslant 0$.

Teorema 8 *Quando for $Z_j - c_j \leqslant 0$ para $j = 1, 2, \ldots, n$, então a solução de ponto extremo $X = (x_{1,o}, \ldots, x_{m,o})$ é também solução mínima, isto é, $P_o = x_{1,o} P_1 + x_{2,o} P_2 + \ldots + x_{m,o} P_o$ e $Z_o = x_{1,o} c_1 + x_{2,o} c_2 + \ldots + x_{m,o} c_m$ = mínimo.*

Demostração: Vamos tomar uma outra solução possível para a qual o valor da função objectivo seja Z' e verificar que $Z_o \leqslant Z'$. Seja então a solução

$$P_o = y_{1,o} P_1 + y_{2,o} P_2 + \ldots + y_{n,o}$$

e

$$Z' = y_{1,o} c_1 + y_{2,o} c_2 + \ldots + y_{n,o} c_n$$

Uma vez que $Z_j - c_j \leqslant 0$ para $j = 1, \ldots, n$, ou $Z_j \leqslant c_j$, substituindo c_j por Z_j na igualdade anterior, vem:

$$Z' \geqslant Y_{1,o} Z_1 + Y_{2,o} Z_2 + Y_{n,o} Z_n$$

Substituindo nesta desigualdade, a igualdade de definição de Z_j ou seja

$$Z_j = x_{1,j} c_1 + x_{2,j} c_2 + \ldots + x_{m,j} c_m$$

$$\text{para } j = 1, 2, \ldots, n$$

obtemos

$$Z' \geqslant Y_{1,o} \left(\sum_{i=1}^{m} x_{i,1} c_i \right) + Y_{2,o} + \left(\sum_{i=1}^{m} x_{i,2} c_i \right) + \ldots +$$

$$+ Y_{n,o} \left(\sum_{i=1}^{m} x_{i,n} c_i \right)$$

e reordenando os termos pelas propriedades comutativa e associativa, vém:

$$Z' \geqslant \left(\sum_{j=1}^{n} Y_{j,o} x_{1,j} \right) c_1 + \left(\sum_{j=1}^{n} Y_{j,o} x_{2,j} \right) c_2 + \ldots +$$

$$+ \left(\sum_{j=1}^{n} Y_{j,o} x_{m,j} \right) c_m$$

Basta provar agora que o segundo membro anterior é Z_o. Ora pela definição desta quantidade, é preciso que os conteúdos dos parêntesis sejam simultaneamente os coeficientes da nova solução P_o e iguais a $x_{1,o}, x_{2,o}, \ldots x_{m,o}$. Para isso façamos a $P_o = Y_{1,o} P_1 + Y_{2,o} P_2 + \ldots + Y_{m,o} P_n$ um tratamento semelhante ao feito a Z'.

Substituindo cada P_j por $P_j = x_{1,j} P_1 + \ldots + x_{m,j} P_m$, vem:

$$P_o = Y_{1,o} \left(\sum_{i=1}^{m} x_{i,1} P_i \right) + \ldots + Y_{n,o} \left(\sum_{i=1}^{m} x_{i,n} P_i \right) \text{ ou}$$

$$P_o = \left(\sum_{j=1}^{n} Y_{j,o} x_{1,o} \right) P_1 + \left(\sum_{j=1}^{n} Y_{j,o} x_{2,j} \right) P_2 +$$

$$+ \ldots + \left(\sum_{j=1}^{n} Y_{j,o} x_{m,j} \right) P_m$$

Como os vectores $P_1, P_2, \ldots P_m$ são linearmente independentes, os seus coeficientes terão de ser iguais aos de $P_o = x_{1,o} P_1 + x_{2,o} P_2 + \ldots + x_{m,o} P_m$ e portanto

$$Z' \geqslant x_{1,o} c_1 + x_{2,o} c_2 + \ldots + x_{m,o} c_m = Z_o$$

ou $Z' \geqslant Z_o$ o que termina a demonstração. Assim estes dois últimos teoremas permitem ir gerando soluções admissíveis de ponto extremo e convergindo para a

solução óptima (mínima) no caso dela existir ou então afirmar que a solução óptima não existe.

2.3 — Fenómeno de Degenerescência e Técnica de Saída

No decurso do estudo anterior do Método do Simplex suposemos sempre a existência de soluções de ponto extremo não degenaradas, isto é, dada a base (P_1, P_2, ..., P_m), não haveria nenhuma componente $x_{i,o}$ nula na solução

$$x_{1,o} P_1 + x_{2,o} P_2 + \ldots + x_{m,o} P_m = P_o$$

e isto para garantir que a solução seguinte seja inferior à anterior e assim atingir o mínimo. De facto se uma $x_{i,o} = 0$, então viria $\theta = \min_i (x_{i,o}/x_{i,j}) = 0$ e, pelo teorema 7, da igualdade $Z = Z_o - \theta (Z_j - c_j)$, tornar-se-ia impossível conseguir $Z < Z_o$.

Mas sucede com frequência aparecerem soluções degeneradas e assim ao escolher $\theta = 0$ para certa $x_{1,o}$, fazemos entrar na base o vector P_1 e aparecerá uma nova solução básica mas o valor da função objectivo permanece constante. Contudo no passo seguinte pode já não aparecer nenhuma componente $x_{i,o} = 0$ e o método leva ainda à solução. O problema surge quando há mais de uma $x_{i,o} = 0$, e portanto dúvida na escolha do vector a sair da base, e então aqui podemos cair numa situação de periodicidade em que as soluções se repetem ao fim dum certo número de passos. O mesmo sucede quando embora não haja $x_{i,o}$ nulas, se apresente uma situação de empate ao obtermos o mesmo θ para duas $x_{i,o}$ diferentes, pois no passo seguinte aparecerão necessariamente $x_{i,o}$ nulas.

Ambas as situações, conquanto pouco frequentes na prática são contornadas seguindo-se a chamada «*Técnica da perturbação*» exposta no livro de Saul J. Gass e que se resume ao seguinte:

Suponhamos que o vector a entrar na base é P_k, que a base é (P_1, P_2, ..., P_m) e que temos

$$\theta = \frac{x_{1,o}}{x_{1,k}} = \frac{x_{2,o}}{x_{2,k}}$$

indecisão quanto ao vector a sair (P_1 ou P_2?). Então calculamos, começando por j = 1, as relações $x_{i,j}/x_{i,k}$ para todas as linhas da coluna 1 onde houve repetição. Se ainda aparecerem empates fazemos o mesmo para J + 1, j + 2, ..., até ao seu desaparecimento. Assim neste exemplo calculamos

$$\min_i \frac{x_{i,1}}{x_{i,k}} \text{ para } i = 1,2$$

se esse mínimo for $x_{1,1}/x_{1,k}$ elimina-se da base o vector P_1; se for $x_{2,1}/x_{2,k}$ elimina-se P_2. Em qualquer caso é sempre o vector P_k que entra na nova base. Se por acaso $x_{1,1}/x_{1,k} = x_{2,1}/x_{2,k}$, formavam-se as relações $x_{1,2}/x_{1,k}$ e $x_{2,2}/x_{,k}$ e assim sucessivamente até não haver dúvidas quanto ao vector a sair.

2.4 — Referências ao Método do Simplex Revisto

Conforme já se viu, o cálculo que nos permite ir passando de uma solução de ponto extremo para outra, é expressar os vectores que não se encontram numa certa base em termos dessa mesma base e isto com a ajuda das «fórmulas de eliminação completa». Em seguida calculamos os elementos da m + 1 — ésima linha, $Z_j - c_j$ para ver que vector deve entrar na base ou ver se a solução já é óptima e determinamos o vector a sair da base. Nesta altura repetimos o ciclo entrando com as fórmulas de eliminação completa.

No entanto há um outro método, chamado Método do Simplex Revisto que nada acrescenta a este em rigor e possibilidades, razões pelas quais não será aqui exposto mas que tem as seguintes vantagens:

a) Em problemas de matriz contendo muitos elementos nulos, o número de passagens é reduzido e portanto o tempo de cálculo é inferior.

b) Os elementos não nulos da matriz originária podem ser armazenados mais compactamente na memória do computador.

c) No método do Simplex inicial tem de registar-se uma tábua completa em cada uma das passagens, mas usando este, isso não se torna necessário pois basta registar apenas uma certa matriz inversa e o vector solução.

Estas vantagens resultam do facto, e aqui reside a diferença entre este método e o estudado, de que em vez de transformarmos todos os elementos das sucessivas tábuas do Simplex, transformamos apenas os elementos de uma matriz inversa (m × m), sempre diferente em cada passo, por meio das fórmulas de eliminação completa.

Capítulo 3

DUALIDADE

3.1. — Generalidades

Para cada problema de programação linear da forma que temos tratado e a que passaremos a chamar Primal, existe um outro com ele relacionado e a que se chama Dual. E por definição os problemas primais-duais dividem-se em dois tipos:

1.º — Primal - Dual assimétricos

Primal → min $f(X) = cX$ com $AX = b$ e $X \geq 0$

Dual → max $g(Y) = Yb$ com $YA \leq c$ e Y qualquer

2.º — Primal - Dual simétricos

Primal → min $f(X) = cX$ com $AX \geq b$ e $X \geq 0$

Dual → max $g(Y) = Yb$ com $YA \leq c$ e $Y \geq 0$

em que

$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$; $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$

O, vector coluna n-dimensional

$A = (a_{i,j})$ com $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$ e $m < n$

$c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$; $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$

Estes dois tipos podem resumir-se apenas a um pois veremos que os problemas primal-dual simétricos se podem apresentar na forma assimétrica. Ver-se-á também que a variável Y do Dual será $Y = c'B^{-1}$ quando a solução do Primal é min $f(X) = c'X'$ em que B^{-1} é a inversa da matriz $(P_1, P_2, \ldots, P_m)$, base da solução final.

Nota-se logo que no Primal o produto AX dá um quadro com m linhas e n colunas enquanto que em YA aparecem n linhas e m colunas já que $YA = A^T Y^T$, o que apresenta vantagens pois dada a interligação que veremos entre as soluções óptimas dos dois problemas pode suceder que o Primal ultrapasse a capacidade do computador pelo número de linhas ou colunas e que na forma Dual isso se não verifique, ou vice-versa.

Recordando agora os problemas expostos no início do trabalho, é fácil dar uma interpretação económica do problema primal e há também uma interpretação semelhante para o Dual se bem que não seja muito evidente o significado da função objectivo e o das restrições, contudo, transformando o problema Primal-Dual simétrico para:

Primal $\rightarrow$ max $f(X) = cX$ com $AX \leqslant b$ e $X \geqslant 0$

Dual $\rightarrow$ min $g(Y) = Yb$ com $YA \geqslant c$ e $Y \geqslant 0$

podemos apresentar as formas verbais seguintes:
Problema Primal: Quantas unidades de cada produto (x_j) se devem produzir de modo a maximizar o valor da produção, sendo dados o valor unitário (c_j) de cada produto e um limite superior para a disponibilidade de cada recurso b_i.

Problema Dual: Que custos ou valores unitários se devem atribuir a cada recurso (y_i) de modo a minimizar o valor total dos recursos gastos sendo dados uma disponibilidade de cada recurso (b_i) e um limite inferior para o valor unitário de cada produto (c_j), ou mais concretamente:

Suponhamos que um industrial, por motivos de concorrência, deseja vender mais barato um certo produto. Para manter uma certa percentagem de lucro, verifica que para isso esse produto teria de sair da linha de produção a c (valor mínimo do custo do produto). Então necessita saber que quantidades teria de gastar dos seus recursos fixos (homens, máquinas e/ou matérias primas) ou a que preços unitários (y_i) lhe ficariam esses recursos de modo a gastar o mínimo de recursos, ou mais simples: Querendo produzir a tanto (menos), a quanto lhe vão ficar os recursos utilizados (mínimo possível)? No caso de serem homens os recursos (por exemplo), qual o seu preço virtual? Claro que o industrial, pela diferença, mais valia, entre o ordenado pago e o preço virtual vê logo quanto ganha ou perde.

Conforme já se viu pelo estudo anterior, qualquer forma de problema de programação linear pode ser alterado pela junção de variáveis de folga, variáveis artificiais e pela igualdade min $f = -\max(-f)$. Assim, podemos transformar os problemas simétricos em problemas assimétricos:

simétricos

Primal $\rightarrow$ min $f(X) = cX$ com $AX \geqslant b$ e $X \geqslant 0$

Dual $\rightarrow$ max $g(Y) = Yb$ com $YA \leqslant c$ e $Y \geqslant 0$

Ora o problema primal transforma-se facilmente no equivalente assimétrico transformando apenas $AX \geqslant b$ em $AX = b$ com as m variáveis de folga não negativas $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_m)$, vector coluna, pondo:

$$(C \mid \bar{O}) = c_1, c_2, \ldots, c_n, o_1, o_2, \ldots, o_m$$

$$; \ (A \mid -I) = \begin{matrix} a_{1,1} \ldots a_{1,n} & -1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,1} \ldots a_{m,n} & 0 & \ldots & -1 \end{matrix}$$

$$\left(\frac{X}{Z}\right) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, z_1, z_2, \ldots, z_m)^T$$

que dá:

$$f(X, Z) = (C \mid \bar{O})\left(\frac{X}{Z}\right) \text{ com } (A \mid -I)\left(\frac{X}{Z}\right) = b$$

$$\text{e} \qquad X, Y \geqslant 0$$

forma primal do problema assimétrico.

Ora o Dual deste Primal, dual do problema primal assimétrico: max $g(Y) = Yb$ com $YA \leqslant c$ e Y qualquer, transforma-se em max $g(Y) = Yb$ com $Y(A \mid -I) \leqslant (c \mid \bar{O})$ donde $YA \leqslant c$ e $-YI \leqslant 0$ equivalentes a $Y \geqslant 0$, portanto finalmente em: max $g(Y) = Yb$ com $YA \leqslant c$ e $Y \geqslant 0$ que é precisamente a forma dual do problema simétrico e portanto os problemas assimétricos e simétricos equivalem-se.

E com esta transformação que acabámos de ver, basta demonstrar o Teorema da Dualidade para os problemas primal-dual assimétricos mas antes disso vejamos certas relações entre o quadro inicial e o quadro final da resolução dum problema pelo Método do Simplex, nomeadamente no respeitante às matrizes correspondentes, às bases e às matrizes inversas:

INICIAL

	Base	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	→ vectores coluna P_j
				0	1	−3	0	2	0	
	P_1	0	7	1	3	−1	0	2	0	
vector a ←	P_4	0	12	0	−2	4	1	0	0	→ matriz A, base inicial (P_1, P_4, P_6)
sair, P_4	P_6	0	10	0	−4	3	0	8	1	
			0	0	−1	3	0	−2	0	→ números $Z_k - c_k$

↓ solução inicial ↓ vector a entrar, P_3

FINAL

Base	c_0	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	→ vectores coluna X
P_2	1	4	$^2/_5$	1	0	$^1/_{10}$	$^4/_5$	0	
P_3	−3	5	$^1/_5$	0	1	$^3/_{10}$	$^2/_5$	0	→ matriz $\overline{X}$, base inicial (P_2, P_3, P_6)
P_6	0	11	1	0	0	$-^1/_2$	10	1	ou $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$
		−11	$-^1/_5$	0	0	$-^4/_5$	$-^{12}/_5$	0	

↓ solução final

os vectores iniciais $P_1, P_2, \ldots, P_6$ iniciais estão expressos em termos da base final $B = P_2, P_3, P_6$, ou seja $P_j = B X_j$, como por exemplo se pode verificar para P_5 $P_5 = (2, 0, 8) = (P_2, P_3, P_6)\ (^4/_5, ^2/_5, 10) = (2, 0, 8)$ e igualmente se veria P_0 ou $b = B X_0$, isto é, $A = B \overline{X}$ ou $B^{-1} A = \overline{X}$ e também $B^{-1} b = X_0$. A solução mínima neste caso é $c_0\ x_0 = (1, -3, 0)\ (4, 5, 11) = -11$.

E assim com a recapitulação destes pormenores e o esclarecimento de certas notações, podemos enfrentar o teorema seguinte.

3.2 — *Teorema da Dualidade*

Enunciado: *Se o problema primal (ou dual) possui solução óptima finita, então o problema dual (ou primal) também a tem e é min f(x) = = max g(y). Mas se um dos problemas tem solução ilimitada, o outro não tem quaisquer soluções admissíveis.*

Demonstração:

I a) Admitamos que o primal tem solução óptima mínima e obtida pelo Método do Simplex, isto é, $\min f(x) = c_0\ x_0$ e, sendo mínima, por um dos teoremas anteriores $Z = (c_0\ X_1 - c_1, c_0\ X_2 - c_2, \ldots, c_0\ X_n - c_n) = (Z_1 - c_1, \ldots, Z_n - c_n) = c_0\ X - c \leqslant 0$.

Definamos agora $Y^0 = (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0)$ por $Y^0 = c_0\ B^{-1}$. Provaremos em primeiro lugar que é solução possível para o problema dual. Ora como $X = B^{-1}\ A$ e $Z = c_0 \overline{X} - c$, de $Y^0\ A \leqslant c$ ou $Y^0\ A - c \leqslant 0$, vem:

$$Y^0\ A - c = c_0\ B^{-1}\ A - c = c_0\ X - c \leqslant 0$$

ou $Y^0\ A - c \leqslant 0$. E o valor da função objectivo dual, usando a definição de Y^0 e a igualdade $X_0 = B^{-1} b$, é

$$Y^0 b = c_0\ B^{-1}\ b = c_0\ X_0 = \min f(x)$$

Falta ver agora se Y^0, além de solução admissível é também solução óptima do dual:

Para quaisquer X e Y, olhando as formas primal e dual, vem:

$$g(y) = Y\ b = Y\ A\ X \leqslant c\ X = f(X), \quad \text{de} \quad Y\ A \leqslant c$$

ou seja $g(Y) \leqslant f(X)$, desigualdade que vale também no caso particular: $\max g(Y) \leqslant \min f(X)$, isto é, o máximo da solução dual é quando muito igual à solução primal. Ora já se viu que para a solução Y^0 do dual se tem a igualdade $g(Y^0) = Y^0\ b = c_0\ X_0 = f(X_0) = \min f(X)$ logo temos

$$\max g(Y) = \min f(X)$$

b) Admitamos agora que o dual tem solução óptima finita. Demonstraremos que o primal também a terá. Para isso transformamos o problema dual para a forma primal e demonstraremos que o dual deste, com solução óptima finita pela alínea a) já demonstrada, é precisamente o primal original. Tem-se para o dual:

$$\max g(Y) = Y\ b \quad \text{com} \quad Y\ A \leqslant c \quad \text{e} \quad Y \quad \text{qualquer}$$

então $\max (Y\ b) = -\min(-Y\ b)$ ou, $-\max (Y\ b) = = \min (Y\ b)$ sujeita à condição $Y\ A + Y_3\ I = c$ em que Y_3 é um conjunto de variáveis de folga não negativas e I matriz identidade. Ora Y é qualquer mas decompondo em variáveis não negativas $Y = y_1 - y_2$, vem a forma primal:

$$\min ((-Y_1 + Y_2)\ b + Y_3\ 0) \quad \text{sujeita a}$$

$(Y_1 - Y_2)\ A + Y_3\ I = c$ com $Y_i \geqslant 0$ para $i = 1, 2, 3$ e agora já se pode aplicar a alínea a). Falta apenas ver que o dual deste problema é o primal original.

Multiplicando por -1 a igualdade anterior vem $-Y_1\ A + Y_2\ A - Y_3\ I = -c$ e para o dual:

$$\max\ (-cX) = -\min\ (cX) \text{ sujeito a}$$
$$(-A \mid A \mid -I)\ X \leqslant (-b \mid b \mid 0) \text{ ou seja}$$
$$-\max\ (-cX) = \underline{\min\ (cX) \text{ sujeito a}}$$

$$\left\{\begin{array}{l} -AX \leqslant -b \\ AX \leqslant b \\ -IX \leqslant 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} AX \geqslant b \\ AX \leqslant b \\ X \geqslant 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \underline{AX = b \text{ com } X \geqslant 0}$$

e este sublinhado é o problema original.

II) Se o primal é ilimitado, então como $g(Y) \leqslant f(x)$, vem que $g(Y) \leqslant -\infty$, pois toda a solução dual satisfazendo $YA \leqslant c$ obrigaria a $g(Y) \leqslant f(X)$ o que é impossível por $f(X)$ ser ilimitada inferiormente (de mim $f(X)$). E da mesma maneira se vê que quando o dual tem uma solução infinita, o primal não tem soluções.

3.3 — Algoritmo do Método do Simplex Dual

NOTA: Convém estudar em seguida o Método do Simplex Dual pois além de resolver o problema dual tem aplicações num algoritmo importante da Programação Linear Inteira. Antes disso, porém, vejamos um facto importante para esse estudo: A matriz inversa de cada nova base pode obter-se directamente da base anterior aplicando as fórmulas de eliminação completa, e aparece no mesmo quadro no lugar dos vectores unitários do quadro anterior.

Seja então $B = (P_1, \ldots, P_l, \ldots, P_m)$ a base antiga e seja $\overline{B} = (P_1, \ldots, P_k, \ldots P_m)$ a nova base onde P_k substituiu P_l. Ora

$$B^{-1}B = B^{-1}(P_1 \ldots, P_l, \ldots, P_m) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \ldots\ldots 0 \\ 0 & 1 \ldots\ldots 0 \\ 0 & 0 \ldots 1 \ldots 0 \\ \vdots & \\ 0 & 0 \ldots\ldots 1 \end{bmatrix}$$

e visto que $X_j = B^{-1} P_j$,

$$B^{-1}\overline{B} = B^{-1}(P_1, \ldots, P_k, \ldots, P_m) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \ldots x_{1,k} \ldots 0 \\ 0 & 1 \ldots x_{2,k} \ldots 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \ldots x_{l,k} \ldots 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \ldots x_{m,k} \ldots 1 \end{bmatrix}, \text{ isto é, } B^{-1}\overline{B} = I_l$$

(onde I_l designa a matriz identidade com excepção da coluna l). Então $B\ B^{-1}\overline{B} = B\,I_l$, ou $\overline{B} = B\,I_l$, donde $\overline{B}^{-1} = (B\,I_l)^{-1}$ ou $\overline{B}^{-1} = I_l^{-1}\ B^{-1}$. Mas designando I_l^{-1} por E_l, fácil de calcular e que dá

$$E_l = \begin{bmatrix} 1 & 0 \ldots -\dfrac{x_{1,k}}{x_{l,k}} \ldots 0 \\ 0 & 1 \ldots -\dfrac{x_{2,k}}{x_{l,k}} \ldots 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \ldots \dfrac{1}{x_{l,k}} \ldots 0 \\ 0 & 0 \ldots -\dfrac{x_{m,k}}{x_{l,k}} \ldots 1 \end{bmatrix}$$

, temos $\overline{B}^{-1} = E_l\ B^{-1}$, o que equivale à aplicação das fórmulas de eliminação. De facto designando por $\overline{b}_{i,j}$ o elemento genérico de $\overline{B}^{-1}$ e por $b_{i,j}$ o de B^{-1}, fazendo o produto $E_l\ B^{-1}$, vem:

$$\overline{b}_{i,j} = b_{i,j} - \frac{b_{l,j}}{x_{l,k}}\ x_{i,k} \text{ para } i \neq l\ ;\ \overline{b}_{l,j} = \frac{b_{l,j}}{x_{l,j}}$$

Vejamos o exemplo seguinte que não é mais do que um extracto da resolução dum problema pelo Método do Simplex:

Base	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1	7	1	3	−1	0	2	0
P_4	12	0	−2	4	1	0	0
P_6	10	0	−4	3	0	8	1
	0	0	−1	3 ↑	0	−2	0
← P_1	10	1	$^5/_2$	0	$^1/_4$	2	1
P_3	3	0	$-^1/_2$	1	$^1/_4$	0	0
P_6	1	0	$-^5/_2$	0	$-^3/_4$	8	1
	−9	0	$^1/_2$ ↑	0	$-^3/_4$	−2	0
P_2	4	$^2/_5$	1	0	$^1/_{10}$	$^4/_5$	0
P_3	5	$^1/_5$	0	1	$^3/_{10}$	$^2/_5$	0
P_6	11	1	0	0	$-^1/_2$	10	1
	−11	$-^1/_5$	0	0	$-^4/_5$	$-^{12}/_5$	0

$B = (P_1, P_4, P_6)$, base inicial

$B^{-1} = (P_1, P_4, P_6)$

$\overline{B} = (P_1, P_3, P_6)$

$$\overline{B}^{-1} = (\overline{X}_1, \overline{X}_4, \overline{X}_6) = \begin{bmatrix} 1 & ^1/_4 & 0 \\ 0 & ^1/_4 & 0 \\ 0 & -^3/_4 & 1 \end{bmatrix}$$

$\overline{\overline{B}} = (P_2, P_3, P_6)$

$$\overline{\overline{B}}^{-1} = (\overline{\overline{X}}_1, \overline{\overline{X}}_4, \overline{\overline{X}}_6) = \begin{bmatrix} ^2/_5 & ^1/_{10} & 0 \\ ^1/_5 & ^3/_{10} & 0 \\ 1 & -^1/_2 & 1 \end{bmatrix}$$

as igualdades são fáceis de verificar quer efectuando os produtos respectivos quer por aplicação das fórmulas de transformação, como aliás já se sabia pelo Método Simplex. Vê-se que a matriz inversa para cada base se vai formando no lugar dos vectores unitários.

3.3 — Algoritmo do Método do Simplex Dual

Seja o problema primal: min c X com A X = b e $X \geqslant 0$

o seu problema dual será: max Y b com Y A $\leqslant$ c e Y qualquer

Escolha-se a base inicial $B = (P_1, P_2, \ldots, P_m)$ de vectores unitários de modo a que um elemento $x_{i,o}$ de $B^{-1}b$ seja negativo, e portanto base não admissível para o primal, e com $c_o X_j$ ou $c_o B^{-1} P_j \leqslant c_j$ para todo o j. Como se viu no teorema da Dualidade uma solução admissível para o dual é:

$$Y^o = c_o B^{-1} \quad \text{com} \quad g(Y^o) = c_o B^{-1} b$$

O objectivo é desenvolver um algoritmo para o problema dual de modo a obter a solução maximizante e portanto também a minimizante para o primal, como diz o teorema anterior. Para isso temos de ir escolhendo novas bases que dêem soluções cada vez maiores para a função objectivo até chegar ao seu máximo, se ele existir, e que além disso continuem a satisfazer as desigualdades Y A $\leqslant$ C.

Designemos por B_i as linhas de B^{-1}. A base não é admissível para o primal mas se o fosse diríamos que a sua solução era $x_{i,o} = B_i b$ (ou $X_o = B^{-1} b$) para $i = 1, 2, \ldots, m$.

Consideremos agora $x_{l,o} = \min_i B_i b < 0$ que existe por hipótese, e para os vectores que não estão na base, isto é, aqueles que são tais que $c_o B^{-1} P_j < c_j$ ou $Y^o P_j < c_j$, calculamos todos os $x_{l,j} = B_l P_j$ e suponhamos que pelo menos uma componente $x_{l,j} < 0$ Calculemos θ da seguinte forma:

$$\theta = \min_{x_{l,x<o}} \frac{Z_j - c_j}{x_{l,j}} = \frac{Z_k - c_k}{x_{l,k}} > 0$$

Entrando o vector P_k, seleccionado, para o lugar de P_l, obtém-se nova base $\overline{B}$ que dará nova solução possível para o dual. $\overline{B}^{-1}$ pode obter-se como se viu pelas fórmulas de eliminação ou pelo produto $E_l B^{-1}$ e a nova solução será

$$\overline{Y} = \overline{c}_o \overline{B}^{-1} = \overline{c}_o E_l B^{-1} =$$

$$= c_o E_l = (c_1, c_2, \ldots, c_k, \ldots, c_m) E_l =$$

$$= c_1, c_2, \ldots, \left(-\frac{x_{1,k}}{x_{l,k}} c_1 - \frac{x_{2,k}}{x_{l,k}} c_2 - \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{x_{l,k}} c_k - \ldots - \frac{x_{m,k}}{x_{l,k}} c_m \right), c_m =$$

acrescentando e tirando ao interior do parêntesis a parcela necessária para termos θ;

$$-\frac{x_{l,k}}{x_{l,k}} c_l + c_l \qquad \text{vem:}$$

$$= c_1, c_2, \ldots, (c_l - \theta), \ldots, c_m =$$

$$= c_1, c_2, \ldots, c_l, \ldots, c_m - \theta\,(0, 0, \ldots 1, \ldots, 0) =$$

$= Y_o - \theta B_l$ por ser de vectores unitários a base inicial.

ou seja

$$\overline{Y} = Y_o - \theta B_l$$

sendo o valor da função objectivo, por ser $B_l\ b = x_{l,o}$:

$$\overline{Y} b = Y_o b - \theta x_{l,o}$$

Claro que a nova solução do primal é $\overline{X} = \overline{B}^{-1} b$ e que também será óptima se todas as componentes forem não negativas, $\overline{X} \geqslant 0$. Se isso não suceder é porque pelo menos uma componente $x_{l,o} = \overline{B}_l\ \overline{b} < 0$ e nesse caso repetimos o trabalho anterior determinando o vector que entra e o que sai para gerar a nova base até à solução do dual e consequentemente do primal. Estas soluções podem não existir, se for ilimitada a solução do dual, e isto ocorre se forem todas não negativas as $x_{l,j} = B_l\ P_j$ podendo agora escolher-se um $\theta > 0$ qualquer. De facto, sendo $x_{l,o} < 0$, $Y_o - \theta_{l,o}$ cresceria tanto quanto se quisesse.

Capítulo 4

PARTE PRÁTICA

4.1 — Esquematização dos Algoritmos

a) Método do Simplex. Recordando aqui o quadro inicial exposto atrás, podemos esquematizar este algoritmo da seguinte maneira:

1.° Apresentado o problema, transformamos o sistema das restrições num sistema de igualdades usando variáveis de folga e de modo a serem não negativos os termos independentes, P_o, no Quadro Inicial. Se o objectivo for maximizar, mudamos para minimizar com max f = − min (− f).

2.° Se conhecermos um conjunto de vectores linearmente independentes tomamo-los para base inicial, se não, tomamos para base o conjunto dos m vectores unitários $(P_1, P_2, \ldots, P_m)$ formando a matriz identidade (m × m), base admissível, que se pode sempre arranjar com a utilização de variáveis artificiais e construímos o quadro inicial.

3.° Assim temos a primeira solução inicial $X_o = B^{-1} P_o = (x_{1,o}, x_{2,o}, \ldots, x_{m,o})$ com $x_{i,o} \geqslant 0$, vector coluna. $Z_o = \sum_{i=1}^{m} c_i\ x_{i,o}$ e ainda $X_j = B^{-1} P_j =$

$= (x_{1,j}, x_{2,j}, \ldots, x_{m,j})$ vectores colunas também.

4.º Calculamos os elementos da $m + 1$ — ésima linha do quadro, $z_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_i \; x_{i,j} - c_j$ para $j = 1, 2, \ldots, n$ e colocamo-los nas respectivas colunas j. Os $z_j - c_j$ referentes aos vectores que estão na base são sempre nulos.

5.º Se os $z_j - c_j$ são todos não positivos então X_o e Z_o é a solução óptima e paramos. Se não forem passamos ao número seguinte.

6.º Consideramos os números $z_j - c_j > 0$ e para diminuir o número de situações necessárias, consideramos $\max_j (z_j - c_j) = z_k - c_k$. Se aparecerem indecisões tomamos o vector coluna de menor índice j. O vector P_k é o vector a entrar na base.

7.º Do vector P_k analisamos as suas componentes $x_{i,k}$. Se forem todas $x_{i,k} \leqslant 0$ o valor da função objectivo torna-se ilimitado e paramos. Se não, das $x_{i,k} > 0$ calculamos

$$\theta = \min_i \frac{x_{i,o}}{x_{i,k}} = \frac{x_{l,o}}{x_{l,k}}$$

e o vector P_l sai da base para dar lugar a P_k.

8.º Passamos a construir o quadro seguinte onde a base apresenta o vector P_k no lugar de P_l. O elemento pivô é o $x_{l,k}$ cruzamento da coluna k com a linha l. Todas as linhas incluindo a $m + 1$ — ésima são transformadas do primeiro quadro pelas fórmulas de eliminação, o que equivale a exprimir todos os vectores P_j que não pertencem à base em termos da nova base.

9.º Depois de elaborado o segundo quadro temos a solução admissível $X'_o = (x'_{1,o}, \ldots, x'_{k,o}, \ldots, x'_{m,o})$ com $x'_{i,o} \geqslant 0$ e $z_o = z_o - \frac{Z_k - c_k}{x_{l,k}} \cdot x_{1,o}$ e passamos ao número 5 para continuar o processo.

NOTA: Se o problema contém variáveis artificais, em número de m ou menos, sabemos que a função objectivo será $\min c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n + w x_{n+1} + w x_{n+2} + \ldots + W x_{n+m}$ e a base, artificial portanto, será $(P_{n+1}, \ldots, P_{n+m})$ para o sistema aumentado. Temos $z_j - c_j = (W, W, \ldots, W) \cdot P_j - c_j = W \sum_{i=1}^{m} x_{i,j} - c_i$ com uma parte em W e outra sem W.

Assim fazemos uma alteração ao quadro já descrito criando a $m + 2$ — ésima linha, colocando nela os coeficientes das partes em W e na linha $m + 1$ as partes sem W, sofrendo também aquela linha as transformações habituais de quadro para quadro.

A selecção do vector a entrar na base faz-se a partir da $m + 2$ — ésima linha e toma-se o $\max \sum_{i=1}^{m} x_{i,j}$ como vulgarmente e segue-se o algoritmo descrito até que todos os vectores artificiais saiam da base ou até que não haja nenhum elemento positivo na linha $m + 2$. No primeiro caso a linha $m + 2$ tem todos os elementos nulos e a base obtida é admissível para o problema original e portanto seguimos agora o Método do Simplex vulgar. No segundo caso há duas possibilidades, ou o elemento $(m + 2, 0)$, isto é, a parte artificial do valor da função objectivo, é maior que zero ou igual a zero. Se suceder a segunda, $(m + 2, 0) = 0$, estamos em presença duma solução admissível com pelo menos um vector artificial, degenerada portanto, e os cálculos continuam. Seleccionamos o maior dos elemetnos da linha $m + 1$ que ficam na mesma coluna dos zeros da linha $m + 2$ para escolher o vector a entrar na base. Atinge-se a solução mínima quando não houver mais nenhum elemento positivo por cima de zeros da linha $m + 2$. Em ambos os casos os elementos da linha $m + 2$ não são transformados de quadro paraquadro. Se a solução final contiver variáveis artificiais elas serão nulas.

Se apenas tivermos necessidade de algumas variáveis artificiais e não das m referidas, o processo corre da mesma maneira.

b) Método do Simplex Dual.

Valendo-nos do conhecimento do Método do Simplex, torna-se fácil esquematizar o procedimento do Método do Simplex Dual pois eles assemelham-se muito nas suas linhas gerais.

1.º Escrevemos o problema na forma: Min c X sujeito a $A X = b$ com $X \geqslant 0$, com o seu dual Max Y b sujeito a $Y A \leqslant c$.

2.º Tomamos uma base inicial $(P_1, P_2, \ldots, P_m)$ tal que pelo menos um elemento $B^{-1}b$ seja negativo e com $c_o B^{-1} P_j \leqslant c_j$ para todo o j, formando o quadro inicial. Temos a solução $Y_o = c_o B^{-1}$ e o valor da função objectivo $c_o B^{-1} b$.

3.º Sendo B_i as linhas de B^{-1}, calculamos $x_{l,o} = \min_i B_i \; b < 0$ e é eliminado da base o vector P_l

4.º Determianmos as componentes $x_{l,j} < 0$ pertencentes a vectores colunas com $m + 1$ — ésimo elemento tal que $Y^o \; P_j < c_j$ e passamos ao número seguinte. Se forem todas $x_{l,j} \geqslant 0$ o processo acaba e não há solução finita.

5.º Calculamos $\theta = \min_{x_{l,j} < o} \frac{z_j - c_j}{x_{l,j}} = \frac{z_k - c_k}{x_{l,k}}$ e o vector P_k entra para o lugar de P_l.

6.º Dispondo de nova base construimos um novo quadro em que os vectores não pertencentes à base estão expressos em termos da nova base, usando para tal as fórmulas de eliminação completa.

7.º Se ainda existir alguma componente $x_{i,o} < 0$, passamos ao número 3.º e repetimos o ciclo. Se for $x_{i,o} \geqslant 0$ para todo o i atingimos a solução óptima para o primal constituída por essas mesmas componentes e portanto também solução dual que é $C_o\ B^{-1}$.

4.2 — *Problemas Resolvidos*

1.º Minimize $x_2 - 3x_3 + 2x_5$ sujeita a $x_j \geqslant 0$ e

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 \quad + 2x_5 &= 7 \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 \quad &= 12 \\ -4x_2 + 3x_3 \quad + 8x_5 + x_6 &= 10 \end{aligned}$$

Imediatamente se vê que dispomos dos vectores unitários P_1, P_4, P_6 em número de m (3) para formarmos a base inicial e podemos formar o primeiro quadro.

		c →	0	1	−3	0	2	0
i	Base	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_1	0	7	1	2	−1	0	2	0
2	P_4	0	12	0	−2	4	1	0	0
3	P_6	0	10	0	−4	3	0	8	1
4			0	0	−1	3	0	−2	0

em que $c_1 = c_4 = c_6 = 0$, $X_o = (x_1, x_4, x_6) = (7, 12, 10)$ $Z_o = c\,X_o = 0$ e a linha 4 é constituída pelos elementos $Z_j - c_j = c^T P_j - c_j$ para j = 1, 2, ..., 6. $\max_j (z_j - c_j) = z_3 - c_3 = 3 > 0$ eportanto entra para a base o vector P_3. $\theta_o = \min_{x_{i,3} > 0} \frac{x_{i,o}}{x_{i,3}} = \min\left(\frac{12}{4}, \frac{10}{3}\right) = \frac{12}{4}$ e sai portanto P_4.

Passamos ao quadro seguinte aplicando as fórmulas de eliminação

			P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_1	0	10	1	$5/2$	0	$1/4$	2	0
2	P_3	−3	3	0	$-1/2$	1	$1/4$	0	0
3	P_6	0	1	0	$-5/2$	0	$-3/4$	8	1
4			−9	0	$1/2$	0	$-3/4$	−2	0

e a nova solução é $X'_o = (x_1, x_3, x_6) = (10, 3, 1)$. $Z'_o = -9$. $\max (z'_j - c_j) = \frac{1}{2} > 0$ e sai P_2. $\theta_o = \frac{10}{5/2}$ e sai P_1. Transformando novamente este quadro, vém

			P	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_2	1	4	$2/5$	1	0	$1/10$	$4/5$	0
2	P_3	−3	5	$1/5$	0	1	$3/10$	$2/5$	0
3	P_6	0	11	1	0	0	$-3/2$	10	1
4			−11	$-1/5$	0	0	$-4/5$	$-12/5$	0

A nova solução é $X''_o = (x_2, x_3, x_6) = (4, 5, 11)$ e $Z''_o = -11$. Como $\max (z_j - c_j) = 0$ esta solução é a mínima.

NOTA: Vê-se que são todos nulos os $z_j - c_j$ para j = 2, 3, 6 mas se algum $z_j - c_j = 0$ para $j \neq 2, 3, 6$, então um desses vectores podia entrar para a base e obtinha-se uma nova solução mínima mas sem alterar o valor da função objectivo. A solução final seria a combinação convexa dessas soluções.

2.º Maximize $x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4$ sujeita a $x_j \geqslant 0$ e

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \quad &= 15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 \quad &= 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 10 \end{aligned}$$

em primeiro lugar transformamos o problema para minimização: $-\min -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4$. Como dispomos apenas do vector unitário P_4 necessitamos de dois vectores artificiais, isto é:

$$-\text{Min} -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 + w + w \quad \text{com}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \quad + w \quad &= 15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 \quad + w &= 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \quad &= 10 \end{aligned}$$

e formamos o primeiro quadro:

		c →	−1	−2	−3	1	w	w
i	Base	c	P	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_5	w	15	1	2	3	0	1	0
2	P_6	w	20	2	1	5	0	0	1
3	P_4	1	10	1	2	1	1	0	0
4			10	2	4	4	0	0	0
5			35	3	3	8	0	0	0

Notar os elementos da linha 5 (m + 2), coeficientes de w, como por exemplo $z_1 - c_1 = w \sum_{i=1}^{3} x_{i,1} - c_1 = w +$

$+ 2w + 1 - (-1) = 2 + 3w : 2$ na linha 4 e 3 na linha 5. A solução inicial é $X_0 = (x_5, x_6, x_4) = (15, 20, 10)$ e $Z_0 = 10 + 35w$. Max $(m + 2, j) = (m + 2, 3) = 8$ e entra o vector P_3. $\theta_0 = 20/5$ (valor mínimo) e portanto sai P_6. Aplicando as fórmulas de eliminação, vém:

i	Base	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	w
1	P_5	w	3	$-1/5$	$\underline{7/5}$	0	0	1
2	P_3	-3	4	$2/5$	$1/5$	1	0	0
3	P_4	1	6	$3/5$	$9/5$	0	1	0
4			-6	$2/5$	$16/5$	0	0	0
5			3	$-1/5$	$7/5$	0	0	0

em que $X'_0 = (x_5, x_3, x_4) = (3, 4, 6)$ e $Z'_0 = -6 + 3w$. O máximo da linha $m + 2$ é $7/5$, entra P_2; $\theta'_0 = 3/{}^7/_5$, e sai P_5:

P_2	-2	$15/7$	$-1/7$	1	0	0
P_3	-3	$25/7$	$3/7$	0	1	0
P_4	1	$15/7$	$\underline{6/7}$	0	0	1
		$-90/7$	$6/7$	0	0	0
		0	0	0	0	0

Como $(m + 2, j) \leqslant 0$ para todo o j e $(m + 2, 0) = 0$ temos uma solução possível para o problema original que é $X''_0 = (x_2, x_3, x_4) = (15/7, 25/7, 15/7)$ e $Z''_0 = -90/7$. Como já não há nenhum vector artificial na base, passamos a aplicar apenas o Método do Simplex para conseguir a solução óptima. Entra P_1 e sai P_4:

P_2	-2	$5/2$	0	1	0	$1/6$
P_3	-3	$5/2$	0	0	1	$-3/6$
P_1	-1	$5/2$	1	0	0	$7/6$
		-15	0	0	0	-1

E como $z_j - c_j \leqslant 0$ para todo o j e apenas $z_j - c_j = 0$ para $j = 2, 3, 1$, obtemos já a solução óptima que também é única. $X'''_0 = (x_2, x_3, x_1) = (5/2, 5/2, 5/2)$ e $Z'''_0 = -(-15) = 15$.

3.º Minimize $-\frac{3}{4} x_1 + 150 x_2 - \frac{1}{50} x_3 + 6 x_4$ sujeito a $x_j \geqslant 0$ e

$$
\begin{aligned}
{}^1/_4\, x_1 - 60\, x_2 - {}^1/_{25}\, x_3 + 9\, x_4 + x_5 \qquad &= 0 \\
{}^1/_2\, x_1 - 90\, x_2 - {}^1/_{50}\, x_3 + 3\, x_4 \qquad + x_6 \quad &= 0 \\
x_3 \qquad\qquad\qquad\qquad + x_7 &= 1
\end{aligned}
$$

a base inicial é evidentemente (P_5, P_6, P_7) e formamos o quadro:

		c →	$-3/4$	150	$-1/50$	6	0	0	0
i	Base	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	P_5	0	0	$\underline{1/4}$	-60	$-1/25$	9	1	0	0
2	P_6	0	0	$1/2$	-90	$-1/50$	3	0	1	0
3	P_7	0	1	0	0	1	0	0	0	1
4			0	$3/4$	-150	$1/50$	-6	0	0	0

Logo se vê que entra P_1 ($z_1 - c_1 = 3/4$ é o máximo) e surge agora indecisão quanto ao vector a sair, P_5 ou P_6? Usando a técnica descrita em 2.3., $\min\left(\frac{1}{4} : \frac{1}{4} ; \frac{1}{2} : \frac{1}{2}\right)$ nada resolve mas indo a $j = 2$, $\min\left(-60 : \frac{1}{4} ; -90 : \frac{1}{2}\right) = x_{1,2}/x_{1,1} = -240$, logo sai o primeiro vector ou seja P_5

1	P_1	$-3/4$	0	1	-240	$-4/25$	36	4	0	0
2	P_6	0	0	0	$\underline{30}$	$3/50$	-15	-2	1	0
3	P_7	0	1	0	0	1	0	0	0	1
4			0	0	30	$7/50$	-33	-3	0	0

aqui entra P_2 (30 é o máximo) e sai P_6:

1	P_1	$-3/4$	0	1	0	$8/25$	-84	-12	8	0
2	P_2	150	0	0	1	$1/500$	$-1/2$	$-1/15$	$1/30$	0
3	P_7	0	1	0	0	1	0	0	0	1
4			0	0	0	$2/25$	-18	-1	-1	0

temos novamente dúvida pois $x_{1,0} = x_{2,0} = 0$ mas desfazemo-la calculando $\min(1/{}^8/_{25} ; 0/{}^1/_{500}) = 0$ o que faz com que saia P_2

1	P_1	$-3/4$	0	1	-160	0	-4	$4/3$	$8/3$	0
2	P_3	$-1/50$	0	0	500	1	$\underline{-250}$	$-100/3$	$50/3$	0
3	P_7	0	1	0	-500	0	250	$100/3$	$-50/3$	0
4			0	0	-40	0	2	$5/3$	$-7/3$	0

também aqui não há qualquer dúvida, entra P_4 e sai P_7.

1	P_1	$-3/4$	$\frac{2}{125}$	1	-168	0	0	$-4/5$	$12/5$	$\frac{2}{125}$
2	P_3	$-1/50$	1	0	0	1	0	0	0	1
3	P_4	6	$\frac{1}{250}$	0	-2	0	1	$\underline{2/15}$	$-1/15$	$\frac{1}{250}$
4			$\frac{-1}{125}$	0	-36	0	0	$7/5$	$-11/5$	$\frac{-1}{125}$

entra P_5 e sai P_4:

1	P_1	$-3/4$	$1/25$	1	-180	0	6	0	2	$1/25$
2	P_3	$-1/50$	1	0	0	1	0	0	0	1
3	P_5	0	$\frac{3}{100}$	0	-15	0	$15/2$	1	$-1/2$	$\frac{3}{100}$
4			$\frac{-1}{20}$	0	-15	0	$\frac{-21}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{-1}{20}$

Todos os elementos $z_j - c_j$ são negativos e nenhum dos respeitantes a vectores não pertencentes à base é nulo, portanto a solução encontrada é óptima e única: $X = (x_1, x_3, x_5) = (1/15, 1, 3/100)$ e $z = -1/20$.

4.° Resolver usando o Método do Simplex Dual: Max $7x_1 - 7x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5$ sujeito a $x_j \geqslant 0$ e

$$3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -3$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 4$$

$$-x_1 + 3x_2 - 3x_4 + x_6 = 12$$

Para termos o problema na forma canónica temos de transformar em minimização: $-\min -7x_1 + 7x_2 - 2x_3 - x_4 - 6x_5$ e a base que se deve escolher é $B = (P_3, P_5, P_6) = B^{-1}$ pois existe um elemento de $P_0 = B^{-1}b$ negativo e todos os $C_0 B^{-1} P_j < c_j$, $z_j \leqslant c_j$ ou $z_j - c_j \leqslant 0$, como se vê no quadro seguinte. Claro que a base não é admissível para o primal:

			c	-7	7	-2	-1	-6	0
i	Base	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_3	-2	-3	$\underline{3}$	$\underline{-1}$	1	$\underline{\underline{-2}}$	0	0
2	P_5	-6	4	2	1	0	1	1	0
3	P_6	0	12	-1	3	0	-3	0	1
4			-18	-11	-11	0	-1	0	0

A solução do dual é $Y_0 = c_0 B^{-1} = (-2, -6, 0) . B^{-1} = (-2, -6, 0)$. Min $B_i b = x_{1,0} = -3$, sai o vector P_3. Para $j \neq 3, 5, 6$, $x_{1,j} = B_1 P_j = (1, 0, 0)$. $(P_1, P_2, P_4) = (3, -1, -2)$, $(—, —, —)$.

$$\theta = \min_{x_{1,j} > 0} \frac{z_j - c_j}{x_{1,j}} = \min \left(\frac{-11}{-1} ; \frac{-1}{-2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} > 0, \frac{1}{2} = \frac{z_4 - c_4}{x_{1,4}} \text{ logo entra } P_4:$$

1	P_4	-1	$3/2$	$-3/2$	$1/2$	$-1/2$	1	0	0
2	P_5	-6	$5/2$	$7/2$	$1/2$	$1/2$	0	1	0
3	P_6	0	$33/2$	$-11/2$	$9/2$	$-3/2$	0	0	1
4	P^5		$-33/2$	$-25/2$	$-21/2$	$-1/2$	0	0	0

Como já não há nenhuma $x_{1,0}$ positiva e $z_j - c_j$ são todos negativos, chegou-se à solução óptima para o primal: $x_4 = 3/2$, $x_5 = 5/2$, $x_6 = 33/2$ e com o valor da função objectivo $-(-33/2) = 33/2$.

A solução óptima para o dual será $Y'_0 = c'_0 \overline{B}^{-1} =$

$$= (-1, -6, 0) \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-5/2, -6, 0)$$

ou seja:

$$y_1 = -5/2, \; y_2 = -6, \; y_3 = 0$$

O valor da função objectivo do dual é $g(Y) = c'_0 \overline{B}^{-1} b = Y b = (-5/2, -6, 0) . \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} =$

$$= -\left(-\frac{33}{2}\right) = \frac{33}{2}$$

5.° Resolução do problema do Ourives

Maximize $Z = 3x_1 + 4x_2$ sujeito a $x_1, x_2 \geqslant 0$ e

$$x_1 + 2x_2 \leqslant 28$$

$$3x_1 + 2x_2 \leqslant 52$$

A forma canónica será: $-\min(-3x_1 - 4x_2)$ sujeito a $x_1, x_2 \geqslant 0$ e

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 28$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_4 = 52$$

e assim:

			-3	-4	0	0
		P	P_1	P_2	P_3	P_4
P_3	0	28	1	$\underline{2}$	1	0
P_4	0	52	3	2	0	1
		0	3	4	0	0

P_2	-4	14	$^1/_2$	1	$^1/_2$	0
P_1	0	14	2	0	-1	1
		-56	1	0	-2	0

P_2	-4	8	0	1	$^3/_4$	$-^1/_4$
P_1	-3	12	1	0	$-^1/_2$	$^1/_2$
		-98	0	0	$-^3/_2$	$-^1/_2$

Logo $x_1 = 8$, $x_2 = 12$ e Max $z = -(-98) = 98$.

PARTE II

Capítulo 5

PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA

5.1 — Introdução

A Programação Linear Inteira (P. L. I.) estuda problemas semelhantes aos de Programação Linear Geral mas em que se exige que todas as variáveis envolvidas tomem exclusivamente valores inteiros. Muito embora haja um outro tipo de problemas de Programação Linear Inteira, o chamado problema misto, em que uma parte das variáveis têm de ser obrigatoriamente inteiras enquanto as restantes podem tomar valores contínuos, será nosso objectivo dedicar-nos aqui ao estudo do primeiro tipo de problemas.

E é grande a aplicação prática da P. L. I. pois que se há problemas onde a Programação Linear geral nos dá como valor de certa variável o número 120,3 (por exemplo hectares a semear ou número de trabalhadores a utilizar) onde 0,3 pode ser desprezado, são também vulgares as situações em que se procura por exemplo o número de navios a construir ou a desempenharem uma certa tarefa e nos aparece um valor não inteiro cuja parte decimal é importante demais para ser desprezada.

Claro que com determinados artifícios nos dados, estes problemas poder-se-iam resolver pelo Método do Simplex num número finito de passos mas infelizmente o tempo de resolução tornar-se-ia demasiado longo ou os resultados obtidos seriam de pouca confiança em virtude dos arredondamentos necessários. Assim desenvolveram-se e continuam-se a desenvolver muitos algoritmos que oferecem possibilidades em variadas aplicações sempre crescentes, conquanto nenhum deles tenha a generalidade do Método do Simplex.

Uma vantagem de que goza a P. L. I. é poder-se introduzir no modelo do problema relações lógicas com a utilização de variáveis booleanas.

Neste trabalho serão apresentados, com a respectiva programação em linguagem A. P. L., apenas dois algoritmos que nos pareceram de mais generalidade e alcance prático: o método de cortes, algoritmo Gomory, para variáveis inteiras quaisquer e um método de Enumeração Implícita, algoritmo Balas onde as variáveis inteiras são obrigadas a tomar exclusivamente os valores 0 ou 1 e que serão sempre representadas por $\delta : 0 \leqslant \delta \leqslant 1$ com δ inteiro, variáveis booleanas portanto.

Além disso com a transformação de quaisquer variáveis inteiras em variáveis booleanas ampliamos a capacidade do algoritmo de Balas, pois nesse caso passa a poder resolver todos os problemas resolúveis pelo algoritmo do Gomory, tendo apenas como limitação o número exageradamente grande de variáveis boolenas que por vezes aparecem naquela transformação.

5.2 — Aplicações e Modelos

Logo no início do desenvolvimento da Programação Linear muitos problemas foram enunciados em termos de Programação Linear Inteira por Dantzig, Hirsch, Tucker, Wagner e outros. No entanto foram os trabalhos recentes de Gomory e Balinsky, que apresentou uma grande variedade de métodos, Benders e muitos outros que abriram novas vias à resolução prática de muitos problemas de P. L. I.

Entre os problemas mais frequentes que não podem ser resolvidos satisfatoriamente pela Programação Linear geral em virtude dos inconvenientes já apontados, contam-se os problemas de organização de trajectos terrestres, marítimos ou aéreos, de sincronização de semáforos, de carga fixa, de programação de maquinaria, de stoques, do caixeiro viajante, etc. Mas muitos outros existem totalmente fora do alcance do Método do Simplex, nomeadamente problemas em que o conjunto das restrições é formado por sub-conjuntos de restrições mutuamente exclusivas (condição «ou»), já que teriamos de efectuar a união dos conjuntos convexos das soluções de cada sub-conjunto que em geral não é convexa. No entanto é precisamente com a introdução das condições do tipo «ou» que se tornam resolúveis certos tipos de problemas onde a função a optimizar ou algumas das suas restrições não são lineares.

Não é possível em P. L. I. formar um modelo matemático único englobando os diferentes tipos de problemas, contudo para os resolúveis pelo algoritmo de Gomory esse modelo só difere do conhecido para a Programação Linear geral pela restrição adicional que obriga as variáveis a tomarem valores inteiros:

$$\min \quad f(X) = c_1 x_1 + \ldots + c_n \; x_n$$

com

$$a_{1,1} x_1 + \ldots + a_{1,n} x_n = b_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{m,1} x_1 + \ldots + a_{m,n} x_n = b_m$$

e todas as componentes de X inteiras e não negativas. ou mais sinteticamente

min $c X$ sujeito a $A X = b$ e $X \geqslant 0$ de componentes inteiras.

Para os problemas de variáveis booleanas considera-se o seguinte modelo:

min cX sujeito a $AX \leqslant b$, $0 \leqslant x_j \leqslant 1$, x_j inteiro e

com $c_j \geqslant 0$

NOTA: Para uma melhor compreensão de certos aspectos dos assuntos expostos, especialmente no respeitante a notações convém recordar da PARTE I deste trabalho tudo aquilo que possa contribuir para qualquer esclarecmiento, já que as matérias se encontram interligadas. Assim só será feita referência às ideias e notações que surjam aqui pela primeira vez.

Capítulo 6

ALGORITMO DE GOMORY E SUA PROGRAMAÇÃO EM LINGUAGEM A. P. L.

6.1 — Generalidades

No método do Simplex começa-se por encontrar uma solução de ponto extremo e ao ir seleccionando novas bases encontram-se novas soluções de ponto extremo até encontrar aquela que optimize a função objectivo. Ora o nosso problema consiste em encontrar a solução admissível de componentes inteiras que mais se aproxime da solução, geralmente não inteira dada pelo Método do Simplex.

Uma primeira tentativa de resolver o problema e devida a Gomory foi acrescentar restrições ao modelo do problema represntando cortes no conjunto convexo das soluções. Acrescentando estas restrições ao modelo, o problema conserva a sua possibilidade de optimização mas nem sempre a sua resolubilidade pelo Método do Simplex. Mas aplicando o algoritmo do Método do Simplex Dual a resolubilidade aparece e se a solução óptima ainda não é inteira introduz-se uma nova restrição e aplica-se outra vez o algoritmo dual até se chegar à solução inteira ou à certeza dela não existir.

Mas este processo foi ultrapassado por um outro mais eficiente e também devido a Gomory em que se parte dum problema com dados inteiros, sempre possível de conseguir, e que por aplicação do Método do Simplex Dual sujeito a certas modificações, todos os quadros conservam a natureza inteira dos dados até à solução final. Em linhas gerais este processo consiste no seguinte:

Começa-se por construir o quadro inicial do Simplex com todos os dados inteiros e escolhe-se uma solução admissível para o dual mas não admissível para o primal. Para isso toma-se uma base $B = (P_1, P_2, \ldots, P_m)$ nas condições exigidas pelo Método do Simplex Dual, isto é, tal que pelo menos um elemento $x_{i,o} = B^{-1} b$ seja negativo e todos $z_j - c_{ij} \leqslant 0$, sendo então $Y_o = c_o \; B^{-1} b$, respectivamente, a solução e o valor da função objectivo do dual. Em seguida acrescentam-se às restrições do modelo mais as seguintes equações:

$x'_j = x_j$ para $j = m+1, \ldots, n$ com $x'_j \geqslant 0$ e $c'_j = c$

Esolhemos agora uma solução possível que contenha n variáveis não negativos em vez das m habituais para o Método do Simplex e que por não serem linearmente independentes nos dão uma solução interior ao conjunto convexo das soluções do modelo inicial.

O algoritmo desenvolve-se agora procurando um processo que possibilite passar deste ponto interior para o ponto óptimo de coordenadas inteiras. Assim introduzem-se novas variáveis à solução de modo a conservar a natureza inteira dos quadros. Isso consegue-se definindo certos planos, restrições em termos das variáveis não-básicas e dum vector coluna de folga P_{n+s}, vector este que além de manter inteiros os dados ao longo dos quadros, vai permitir deslocar o ponto interior inicial para mais perto da solução óptima inteira. E com a aplicação sucessiva destas restrições se chega à solução óptima inteira.

6.2 — Escolha do plano de corte

NOTA: Cada elemento $x_{i,j}$ dos quadros, inteiro ou não, pode ser escrito como múltiplo dum inteiro mais uma parte fraccionária chamada resíduo:

$$x_{i,j} = b_{i,j}\lambda + r_{i,j} = \left[\frac{x_{i,j}}{\lambda}\right]\lambda + r_{i,j} \quad \text{para todo o } j, \text{ e}$$

$$1 = \left[\frac{1}{\lambda}\right]\lambda + r$$

em que $0 \leqslant r_{i,j}$; $r < \lambda$, $b_{i,j}$ é inteiro, $r_{i,j}$ é o resíduo, λ é um número positivo que se irá determinar e [...] significa «o maior número inteiro contido em». Evidentemente que se $x_{i,j}/\lambda <$ a sua parte inteira é $b_{i,j} \leqslant 0$ e se $\lambda > 1$, $[1/\lambda] = 0$. Para melhor compreensão vejamos os exemplos:

$x_{i,j} = 3{,}2$ e seleccionou-se $\lambda = 0{,}5$, então $3{,}2 = [3{,}2/0{,}5] \cdot 0{,}5 + r_{i,j}$ ou $3{,}2 = [6{,}4] \cdot 0{,}5 + r_{i,j}$ donde $3{,}2 = 6 \times 0{,}5 + r_{i,j} \Rightarrow r_{i,j} = 0{,}2$ e portanto como era de esperar: $3{,}2 = 6 \times 0{,}5 + 0{,}2$ e $0{,}2 < 0{,}5$. $x_{i,j} = -2{,}5$ e $\lambda = 0{,}2$, então $-2{,}5 = [-2{,}5/0{,}2] \cdot 0{,}2 + r'_{i,j} = [-12{,}5] \cdot 0{,}2 + r'_{i,j} = -13 \times 0{,}2 + r'_{i,j} = -2{,}6 + r'_{i,j}$ donde $r'_{i,j} = 0{,}1 < \lambda$ como o exigido.

Tomemos então uma equação com alguma componente $x_{i,o} < 0$. Seja a i — ésima:

$$x_{i,o} = 0 + \ldots + 1\, x_i + \ldots + 0 + x_{i,m+1}\; x_{m+1} + \ldots + x_{i,n}\; x_n \qquad (2.1)$$

com $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ variáveis não-básicas e x_i básica. básica. Aplicando a escrita exposta na nota a equação anterior vém:

$$\left[\frac{x_{i,o}}{\lambda}\right]\lambda + r_{i,o} = \left(\left[\frac{1}{\lambda}\right]\lambda + r\right) x_i + \left(\left[\frac{x_{i,m+1}}{\lambda}\right]\lambda + r_{,m+1}\right) x_{m+1} + \ldots + \left(\left[\frac{x_{i,n}}{\lambda}\right]\lambda + r_{i,n}\right) x_n$$

ou ainda:

$$\left(\left[\frac{x_{1,o}}{\lambda}\right]-\left[\frac{1}{\lambda}\right]x_1-\left[\frac{x_{1,m+1}}{\lambda}\right]x_{m+1}-\dots-\left[\frac{x_{1,n}}{\lambda}\right]x_n\right)\lambda+r_{1,o}=r\,x_1+r_{1,m+1}\,x_{m+1}+\dots+r_{1,n}\,x_n$$

igualdade esta que se verifica para qualquer valor inteiro positivo das variáveis como na I — ésima equação inicial e onde o segundo membro é positivo por serem positivos os resíduos. Designamos o conteúdo do parêntesis ( ) por x_{n+s} (variável correspondente à nova coluna P_{n+s} e com s a designar o número de planos de corte):

$$x_{n+s}=\left[\frac{x_{1,o}}{\lambda}\right]-\left[\frac{1}{\lambda}\right]x_1-\sum_{j\neq \text{base}}\left[\frac{x_{1,j}}{\lambda}\right]x_j \quad (2.2)$$

que se vê ser inteira pelas condições postas e também não negativa pois se o fosse, como $r_{1,o}$ e λ são positivos viria o segundo membro da penúltima igualdade negativo.

Ora é precisamente este inteiro não negativo x_{n+s} que se introduz como nova variável. Se restringirmos $\lambda > 1$, como $[1/\lambda] = 0$, vém para x_{n+s}:

$$x_{n+s}=\left[\frac{x_{1,o}}{\lambda}\right]-\left[\frac{x_{1,m+1}}{\lambda}\right]x_{m+1}-\dots-\left[\frac{x_{1,n}}{\lambda}\right]x_n$$

ou, pela definição de $b_{1,j}$:

$$x_{n+s}=b_{1,o}-b_{1,m+1}\,x_{m+1}-\dots-b_{1,n}\,x_n$$

e finalmente

$$b_{1,o}=b_{1,m+1}\,x_{m+1}+\dots+b_{1,n}\,x_n+x_{n+s} \quad \text{com } \lambda>1 \quad (2.3)$$

que é a restrição usada como plano de corte e que é satisfeita para qualquer solução inteira visto que qualquer $b_{1,j}$ e x_{n+s} são inteiros. Além disso como se supôs é $x_{1,o} < 0$, $b_{1,o} < 0$ e também alguma variável não básica $x_{1,j}$ é negativa para que o Método do Simplex Dual possa ser aplicado pois se não o problema não seria resolúvel.

Se λ fôr suficientemente grande, qualquer $[x_{1,j}/\lambda]$ para $x_{1,j} < 0$ dará $b_{1,j} = -1$ e então a equação de corte, agregada na linha n+1 do quadro inicial disporá dum elemento -1 que pode ser usado como pivô Parece então fácil escolher λ mas sucede que quanto mais pequeno fôr λ maior será o aumento do valor da função objectivo e portanto maior a rapidez com que se obtém a solução óptima (estamos a usar o Método do Simplex Dual e portanto

$$\theta=\min_{x1,j<o}\frac{z_j-c}{x_{1,j}}=\frac{z_k-c_k}{x_{1,k}}>0$$

e $\quad Y\,b = Y_o\,b-\theta\,x_{1,o})$

De facto esse valor é agora

$$x_{o,o}-\frac{x_{o,k}}{-1}\,b_{1,o}=x_{o,o}+x_{o,k}\,b_{1,o}=x_{o,o}+(z_k-c_k)\left[\frac{x_{1,o}}{\lambda}\right]$$

o que prova a afirmação feita e onde $x_{o,o}$ é o valor inicial da função objectivo e P_k, o vector coluna pivô, deve ser escolhido do mesmo modo que no Método do Simplex Dual e de tal modo que

$$\theta=\min_{x1,j<o}\frac{z_j-c_j}{x_{1,j}}=\min_{x1,j<o}\frac{x_{o,j}}{-1}=\frac{x_{o,k}}{-1}=\frac{z_k-c_k}{-1}$$

6.3 — Selecção de λ

Como já se viu há conveniência no aparecimento do elemento pivô -1, cruzamento da linha restrição de corte com a coluna k, isto é, $-1 = b_{1,k} = [x_{1,k}/\lambda]$ de modo que pela definição de θ:

$$\frac{z_k-c_k}{[x_{1,k}/\lambda]}=\frac{z_k-c_k}{-1}\leq\frac{z_j-c_j}{[x_{1,j}/\lambda]}=\frac{z_j-c_j}{b_{1,j}}$$

$$\text{para} \quad x_{1,j}<0 \quad \text{ou} \quad \frac{z_k-c_k}{-1}\leq\frac{Z_j-c_j}{b_{1,j}}$$

Designando agora por m_j o maior inteiro para o qual se mantenha

$$\frac{z_k-c_k}{-1}\leq\frac{z_j-c_j}{-m_j}$$

virá:

$$-b_{1,j}=-\left[\frac{x_{1,j}}{\lambda}\right]\leq m_j$$

e sendo $x_{1,j} < 0$, o λ mais pequeno a satisfazer esta desigualdade e que simultaneamente faça pivô a coluna P_k ao conter o elemento $b_{1,k} = -1$ será para cada j:

$$\lambda_j=-\frac{x_{1,j}}{m_j}$$

Mas para que efectivamente apareça o elemento pivô -1, o λ_j escolhido terá de ser pelo menos igual ao maior dos λ_j, isto é:

$$\lambda=\max_{x1,j<o}\lambda_j$$

NOTA: Se o cálculo de λ conduzir a $\lambda = 1$, isto é, $\lambda = \lambda_k = -x_{1,k} = 1$, temos de arranjar uma restrição de corte que não altere a base, ou melhor, que não a destrua. Para isso ela terá que ser função unicamente das variáveis não básicas o que só por si implica que $\lambda > 1$ já que terá de se anular x_1 em (2.2).

Sabemos que λ não tem que ser inteiro e que para P_k temos $m_{k=1}$, $\lambda_k = -x_{1,k}$ e

$\lambda \geqslant \lambda_k$ o que faz com que $b_{l,k} = [x_{l,k}/\lambda] = -1$ como é necessário.

6.4 — Esquematização do Algoritmo

1.º Toma-se uma solução admissível dual e forma-se o quadro inicial com elementos inteiros e juntando as $n - m$ restrições $x'_j = x_j$ para $j = m + 1, \ldots, n$ com $x'_j \geqslant 0$ e $c'_j = c_j$

2.º Toma-se uma equação (a l — ésima) que tenha $x_{l,o} < 0$ e tal que $x_{l,o} = \min_i x_{i,o}$. Se não existir nenhuma componente $x_{i,o} < 0$ então a solução dual é já a óptima e inteira.

3.º Calcula-se o vector coluna P_k, pivô, de modo que

$$-(z_k - c_k) = \min_{x1,j<o} \left\{ -(z_j - c_j) \right\} \text{ para } j > 1$$

Se não existirem $x_{l,j} < 0$ o problema não é possível

4.º Para cada j onde $x_{l,j} < 0$, calcula-se o maior inteiro m_j tal que

$$-(z_k - c_k) \leqslant \frac{-(z_j - c_j}{m_j}$$

5.º Define-se $\lambda_j = -(x_{l,j}/m_j)$ para todas as $x_{l,j} < 0$

6.º Determina-se $\lambda = \max_j \lambda_j$. Se $\max \lambda_j = 1$ toma-se um $\lambda > 1$ qualquer mas tendo em mente as considerações sobre a grandeza de λ vistas no número (2.3).

7.º Costroi-se a restrição de corte (2.3) e junta-se ao quadro inicial na $n + 1$ — ésima linha, ficando a nova variável x_{n+s} a corresponder à coluna P_{n+s} (onde s representa o número de restrições que se vão construindo.

8.º Aplica-se a transformação do Simplex por intermédio das fórmulas de eliminação completa incluindo a linha $n + 1$ e tomando $b_{l,k} = -1$ como elemento pivô. Assim fica introduzida a nova variável não básica x_{n+s} e como o elemento pivô era -1, o quadro seguinte será inteiro como o inicial e aplica-se novamente todo o processo.

6.5 — Exemplo resolvido

Minimize $10x_1 + 14x_2 + 21x_3$ sujeita a $x_j \geqslant 0$ e

$$\begin{aligned} 8x_1 + 11x_2 + 9x_3 - x_4 \qquad\qquad &= 12 \\ 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 \qquad - x_5 \qquad &= 14 \\ 9x_1 + 6x_2 + 3x_3 \qquad\qquad - x_6 &= 10 \end{aligned}$$

Todos os elementos são já inteiros; multiplicamos cada equação por (-1) para obtermos termos independentes negativos como exigido no Método do Simplex Dual; tomamos para base P_4, P_5, P_6 admissível para o dual e inadmissível para o primal; acrescentamos as equações $x'_j = x_j$ para $j = 1, 2, 3$,; construimos o quadro com mais a linha $n + 1 = 7$ e a coluna P_7 para serem preenchidas com a restrição de corte e com a nova variável:

	i	Base	c	c P_0	10 P_1	14 P_2	21 P_3	0 P_4	0 P_5	0 P_6	10 P'_1	14 P'_2	21 P'_3	P_7
a)	0			0	−10	−14	−21	0	0	0	0	0	0	0
	1	P_4	0	−12	−8	−11	−9	1	0	0	0	0	0	0
	2	P_5	0	−14	−2	−2	−7	0	1	0	0	0	0	0
	3	P_6	0	−10	−9	−6	−3	0	0	1	0	0	0	0
b)	4	P'_1	10	0	−1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	5	P'_2	14	0	0	−1	0	0	0	0	0	1	0	0
	6	P'_3	21	0	0	0	−1	0	0	0	0	0	1	0
	7			−4	−1	−1	−2	0	0	0	0	0	0	1

onde a) é a linha dos $z_j - c_j$ e b) conjunto das restrições: $-x_1 + x'_1 = 0$; $-x_2 + x'_2 = 0$ e $-x_3 + x'_3 = 0$.

De P_o toma-se a minima componente, -14, e seleciona-se a 2.ª equação para gerar a restrição de corte. Então

$$\frac{z_k - c_k}{-1} = \min_{x2,j<o} \left(\frac{z_j - c_j}{-1} \right) = \min \left(\frac{-10}{-1} ; \frac{-14}{-1} ; \frac{-21}{-1} \right) = 10 \Rightarrow P_1 \text{ pivô.}$$

$$\frac{z_k - c_k}{-1} \leqslant \frac{z_j - c_j}{-m_j} \text{ ou } 10 \leqslant \left(\frac{10}{m_1} ; \frac{14}{m_2} ; \frac{21}{m_3} \right)$$

donde

$$(m_1, m_2, m_3) \leqslant \left[\frac{10}{10} ; \frac{14}{10} ; \frac{21}{10} \right] = (1, 1, 2) \text{ e}$$

$$\lambda = \max \lambda_j = \max \frac{-x_{2,j}}{m_j} = \max\left(\frac{2}{1}; \frac{2}{1}; \frac{7}{2}\right) = \frac{7}{2}$$

Logo a restrição de corte é:

$$\left[\frac{-14}{7/2}\right] = \left[\frac{-2}{7/2}\right] x_1 + \left[\frac{-2}{7/2}\right] x_2 + \left[\frac{-7}{7/2}\right] x_3 + x_7$$

ou $-4 = -x_1 - x_2 - 2x_3 + x_7$ que se colocou na linha 7 do quadro anterior: $x_{n+1} = x_7$. Aplicando agora as fórmulas de eliminação $x'_{i,j} = x_{i,j} - (x_{l,j} : x_{l,k})$. $x_{i,k}$ para $j = 0, 1, \ldots, 7$ e para cada $i = 0, 1, \ldots, 6$ e $x'_{k,j} = x_{l,j} : x_{l,k}$, acrescentando a coluna P_8, vém:

i	Base	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P'_1	P'_2	P'_3	P_7	P_8
0			40	0	−4	−1	0	0	0	0	0	0	−10	0
1	P_4	0	20	0	−3	7	1	0	0	0	0	0	−8	0
2	P_5	0	−6	0	0	−3	0	1	0	0	0	0	−2	0
3	P_6	0	26	0	3	15	0	0	1	0	0	0	−9	0
4	P'_1	10	4	0	1	2	0	0	0	1	0	0	−1	0
5	P'_2	14	0	0	−1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
6	P'_3	21	0	0	0	−1	0	0	0	0	0	1	0	0
7			−2	0	0	−1	0	0	0	0	0	0	−1	1

Temos $x_{2,0} = -6$ e portanto a equação geradora é a segunda, e determina-se a coluna pivô:

$$\frac{z_k - c_k}{-1} = \min\left(\frac{-1}{-1}; \frac{-10}{-1}\right) = 1 \Rightarrow P_3 \text{ como}$$

coluna pivô $(m_3, m_7) \leqslant \left(\frac{1}{1}; \frac{10}{1}\right) = (1, 10) \Rightarrow$

$$\lambda = \max\left(\frac{3}{1}; \frac{2}{10}\right) = 3 \text{ Então a nova restrição será}$$

$$\left[\frac{-6}{3}\right] = \left[\frac{-3}{3}\right] x_3 + \left[\frac{-2}{3}\right] x_7 + x_8 \text{ ou}$$

$-2 = -x_3 - x_7 + x_8$ que se colocou na última do quadro anterior. Como a coluna pivô se transforma em zeros e as colunas P_4, P_5, P_6, P'_1, P'_2, P'_3 não se alteram na transformação, podemo-los eliminar dos quadros:

i	Base	c	P_0	P_2	P_7	P_8	P_9
0			42	−4	−9	−1	0
1	P_4	0	6	−3	−15	7	0
2	P_5	0	0	0	1	−3	0
3	P_6	0	−4	3	−24	15	0
4	P'_1	10	0	1	−3	2	0
5	P'_2	14	0	−1	0	0	0
6	P'_3	21	2	0	1	−1	0
7			−1	0	−1	0	1

$$\frac{z_k - c_k}{-1} = \min\left(\frac{-9}{-1}\right) = 9 \text{ coluna pivô } P_7$$

$9 \leqslant \left(\frac{9}{m_7}\right) \Rightarrow m_7 = 1$ e poranto $\lambda = \frac{24}{1} = 24$. Logo restrição de corte será $\left[\frac{-4}{24}\right] = \left[\frac{3}{24}\right] x_2 + \left[\frac{-24}{24}\right] x_7 + \left[\frac{15}{24}\right] x_8$ ou $-1 = -x_7 + x_9$ que se colocou na linha 7 e vem:

i	Base	c	P	P_2	P_8	P_9	P_{10}
0			51	−4	−1	−9	0
1	P_4	0	21	−3	7	−15	0
2	P_5	0	−1	0	−3	1	0
3	P_6	0	20	3	15	−24	0
4	P'_1	10	3	1	2	−3	0
5	P'_2	14	0	−1	0	0	0
6	P'_3	21	1	0	−1	1	0
7			−1	0	−1	0	1

a equação geradora é a segunda, logo

$$\frac{z_k - c_k}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1 \Rightarrow P_8 \text{ coluna pivô. } m_8 \leqslant m_8 \leqslant$$

$\leqslant \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{1} = 3$, logo a restrição será -1

$= -x_8 + x_{10}$ já colocada na linha 7. Transformando vém:

i	Base	c	P_0	P_2	P_9	P_{10}
0			52	−4	−9	−1
1	P_4	0	14	−3	−15	7
2	P_5	0	2	0	1	−3
3	P_6	0	5	3	−24	15
4	P'_1	10	1	1	−3	2
5	P'_2	14	0	−1	0	0
6	P'_3	21	2	0	1	−1

e por não haver qualquer termo independente (da coluna P_0) negativo, chegou-se à solução final inteira que é:
valor óptimo (mínimo) e inteiro 52

$$x_1 = x'_1 = 1;\ x_2 = x'_2 = 0;\ x_3 = x'_3 = 2;\ x_4 = 14;$$
$$x_5 = 2;\ x_6 = 5$$

6.6 — Programação do Algoritmo de Gomory

Para facilidade de utilização convém que os dados a fornecer ao programa sejam fáceis de obter a partir do problema apresentado. Assim, além da programação do algoritmo de Gomory propriamente dito, desenvolvemos uma função «PRONTA» capaz de submeter a matriz A das restrições e o vector B dos coeficientes da função objectivo ao tratamento necessário para conseguirmos o quadro inicial exigido pelo algoritmo de Gomory. Em seguida a função «OPTIMA», que interpreta o algoritmo de Gomory, dá-nos a solução do problema ou a certeza da sua irresolubilidade pelo referido método, mas por uma questão de exposição e até de memorização, compomos estas duas funções numa outra de nome «GOMORY» que só por si efectua todos os cálculos necessários.

Se o problema for o exemplo anterior os dados a fornecer serão apenas

```
A ← 8  11  9  −1  0  0  12
    2  2   7  0   −1 0  14
    9  6   3  0   0  −1 10
B ← 10 14  21 0   0  0
```

e de forma semelhante se procederia para qualquer problema depois de colocado na forma canónica.

Vejamos então a função «PRONTA» que prepara os dados para a função «OPTIMA» e com a explicação das variáveis e dos cálculos efectuados em cada linha:

```
∆ A PRONTA B
```

Fixação da dimensão da matriz A; multiplicação da matriz A por −1 se não tiver elementos independentes negativos (agora na primeira coluna) e que passa a ser AR

```
[ 1]  AR ← (−1 * (v/A [: 1] > 0)) × A ← −1 ⌽ A;
      D ← (ρA) [1]; G ← (ρA) [2]
```

Selecção dos vectores unitários de AR, V, sua eliminação e definição da nova matriz AC

```
[ 2]  AC ← ((0, V) ≤ ∧/~ V ← 1 = + ⌿ I A [; 1 +
      + ⍋ G − 1])/AR
```

Definição de E, número de colunas

```
[ 3]  E ← (G − F ← + /V) − 1
```

B1, coeficientes da função objectivo ordenados por vectores coluna e com os zeros necessários.

```
[ 4]  B1 ← ((~ V)/B), (V/B), (D − F) ρ 0
```

B3, índices dos vectores da base

```
[ 5]  B3 ← (E + ⍋ D), ⍋ E
```

Posição dos vectores unitários, U; há vectores unitários na matriz dada? Salto para a linha [8].

```
[ 6]  → (1 − v/V)/8; U ← (0, V)/⍋ G
```

Índices da base para o caso de haver vectores unitários.

```
[ 7]  B3 [⍋ ρ L] ← L; B3 [B3 ⍋ L] ← B3 [⍋ ρ L ← (V/
      /⍋ G − 1) + . × − AR [; U]]
```

Coeficientes c_j , B2, correspondentes aos vectores da base

```
[ 8]  B2 ← B1 [B3]
```

Matriz W destinada a ser usada por «OPTIMA».

```
[ 9]  W ← ⍉ (((D ρ 1), E ρ 0)/⍉ A C) + ((D ρ 0),
      E ρ 1) − (0, ⍋ E)∘. = ⍋ E
```

Matriz auxiliar, argumento de «OPTIMA» composta por: coeficientes da função objectivo; coeficientes da base; índices dos vectores da base.

```
[10]  Y ← (3, ρ B1) ρ B1, B2, B3
      ∇
```

Vejamos agora a função «OPTIMA»

```
∇ A OPTIMA B
```

Número de vectores da base dual, C D

```
[ 1]  CD ← 1 + −/ρ A
```

Cálculo do vector $z_k - c_k$, Z M C

```
[ 2]  Z M C ← (0, − B[1; ⍋ (ρ A) [2] − 1]) +
      + (B[2;]) [⍋ C D] + . × A[⍋ C D;]
```

Ampliação da matriz A com a primeira linha $z_k - c_k$

```
[ 3]  A [1;] ← A [1;] + Z M C; A ← (0, (ρ A)[1]
      ρ 1) ⍪ A
```

Há elementos negativos na primeira coluna? Se não sai a solução.

[4] → (∧/0 ≤ E ←, A [1 + s (ρ A) − 1; 1])/14

Selecção da equação geradora, índice L, da restrição de corte.

[5] L ← 1 + E s⌊/E; Q ← A [1;] < 0;
G ← (N ← ρ E), 1

Há elementos negativos na equação seleccionada debaixo de elementos negativos da linha $z_k - c_k$? Se não há não tem solução.

[6] → (0 = +/Q × P ← 0, (A [L;]) [1 + + s (ρ A) [2] − 1] < 0)/17

Determinação da coluna pivô, PIVO.

[7] PIVO ← (, A [1;]) s − MIN ←⌊/−V ← (P × × Q)/, A [1;]

erro do Interpretador na função chão (⌊), LDA.
Determinação de λ com um artifício para contornar um

[8] LDA ← ⌈/(− (P × Q)/A [L;]) ÷ (⌊ 1000 + + V ÷ − MIN) − 1000

[9] LDA ← LDA + 1 = LDA

Restrição de corte, RESCO, deduzida de A [L;].

[10] RESCO←((⌊ 1000 + A [L;] ÷ LDA) − 1000), 1

Ampliação da matriz A com uma coluna de zeros.

[11] A ← (((ρ A) [2] ρ 1), 0) , A

Aplicação das fórmulas de eliminação completa.

[12] A ← A + (, A[; PIVO])∘. × RESCO
Eliminação das colunas de zeros e regresso a [4].

[13] → 4, ρ A ← (0 ≠ + ≠ A × A)/A
Saida dos resultados

[14] 'VALOR OPTIMO = '; A [1;1]

[15] 'VARIÁVEIS = '; E [B [3;] s s N]

[16] → 0

[17] 'NÃO TEM SOLUÇÃO'

∇

E finalmente a função «GOMORY»

A GOMORY B

[1] A PRONTA B

[2] W OPTIMA Y

∇

Apresentamos em seguida seguida a listagem das funções pelo computador e, para melhor compreensão dos algoritmos, apresentamos também a sequência dos cálculos efectuados na resolução do problema já resolvido manualmente.

```
      ∇A PRONTA B
[1]   AB←(¯1↑(∨/A[;1]>0))×A←¯1↓A;B←(⍴A)[1];G←(⍴A)[2]
[2]   AC←((0,V)≤∧/~V+1=+⌿|A[;1+⍳(⍴A)[2]-1])/AB
[3]   E←(G-B++/V)-1
[4]   B1←((~V)/B),(V/B),(D-B)⍴0
[5]   B3←(E+⍳D),⍳E
[6]   →(1-∨/V)/8;U←(0,V)/⍳G
[7]   B3[⍳⍴L]←L;B3[B3⍳L]←B3[⍳⍴L←(V/⍳G-1)+.×-AB[;U]]
[8]   B2←B1[B3]
[9]   W←⍉(((D⍴1),E⍴0)\⍉AC)+((B⍴0),E⍴1)\-(0,⍳E)∘.=⍳E
[10]  Y←(3,⍴B1)⍴B1,B2,B3
[11]  ∇

      ∇A OPTIMA B
[1]   CD←1+-/⍴A
[2]   ZMC←(0,-B[1;⍳(⍴A)[2]-1])+(B[2;])[⍳CD]+.×A[⍳CD;]
[3]   A[1;]←A[1;]+ZMC;A←(0,(⍴A)[1]⍴1)\A
[4]   →(∧/0≤E←,A[1+⍳(⍴A)[1]-1;1])/14
[5]   L←1+E⍳⌊/E;Q←A[1;]<0;G←(N←⍴E),1
[6]   →(0=+/Q×P←0,(A[L;])[1+⍳(⍴A)[2]-1]<0)/17
[7]   PIVO←(,A[1;])⍳-MIN←⌊/-V←(P×Q)/,A[1;]
[8]   LDA←⌈/(-(P×Q)/A[L;])÷(⌊1000+V÷-MIN)-1000
[9]   LDA←LDA+1=LDA
[10]  RESCO←((⌊1000+A[L;]÷LDA)-1000),1
[11]  A←(((⍴A)[2]⍴1),0)\A
[12]  A←A+(,A[;PIVO])∘.×RESCO
[13]  →4,⍴A←(0≠+⌿A×A)/A
[14]  'VALOR OPTIMO = ';A[1;1]
[15]  '    VARIAVEIS = ';E[B[3;]⍳⍳N]
[16]  →0
[17]  'NAO TEM SOLUCAO'
[18]  ∇

      ∇A GOMORY B
[1]   A PRONTA B
[2]   W OPTIMA Y
[3]   ∇

      Q←6⍴0
      Q[⍳6]← 10 14 21 0 0 0

      P←3 7⍴0
      P[1;⍳7]← 8 11 9 1 0 0 12
      P[2;⍳7]← 2 2 7 0 1 0 14
      P[3;⍳7]← 9 6 3 0 0 1 10
      )CARD END
```

```
      A PRONTA B

PRONTA[1]
  ¯12   ¯8  ¯11   ¯9   ¯1    0    0
  ¯14   ¯2   ¯2   ¯7    0    1    0
  ¯10   ¯9   ¯6   ¯3    0    0  ¯137
PRONTA[2]
  ¯12   ¯8  ¯11   ¯9
  ¯14   ¯2   ¯2   ¯7
  ¯10   ¯9   ¯6   ¯3
PRONTA[3] 3
PRONTA[4] 10  14  21  0  0  8
PRONTA[5] 4  5  6  1  2  3
PRONTA[6] 5  6  7
PRONTA[7] 4  5  64  5  6
PRONTA[8] 0  0  0  10  14  21
PRONTA[9]
  ¯12   ¯8  ¯11   ¯9
  ¯14   ¯2   ¯2   ¯7
  ¯10   ¯9   ¯6   ¯3
    0   ¯1    0    0
    0    0   ¯1    0
    0    0    0   ¯1
PRONTA[10]
   10   14   21    0    0    0
    0    0    0   10   14   21
    4    5    6    1    2    3

      W

  ¯12   ¯8  ¯11   ¯9
  ¯14   ¯2   ¯2   ¯7
  ¯10   ¯9   ¯6   ¯3
    0   ¯1    0    0
    0    0   ¯1    0
    0    0    0   ¯1

      B

10  14  21  0  0  0

      Y

   10   14   21    0    0    0
    0    0    0   10   14   21
    4    5    6    1    2    3
```

```
      T∆OPTIMA←⍳18

      W OPTIMA Y

OPTIMA[1] 3
OPTIMA[2] 0  ¯10  ¯14  ¯21
OPTIMA[3] 0  ¯10  ¯14  ¯21
   0  ¯10  ¯14  ¯21
 ¯12   ¯8  ¯11   ¯9
 ¯14   ¯2   ¯2   ¯7
 ¯10   ¯9   ¯6   ¯3
   0   ¯1    0    0
   0    0   ¯1    0
   0    0    0   ¯1
OPTIMA[4]
OPTIMA[5] 30  1  1  16  1
OPTIMA[6]
OPTIMA[7] 2
OPTIMA[8] 3.5
OPTIMA[9] 3.5
OPTIMA[10] ¯4  ¯1  ¯1  ¯2  1
OPTIMA[11]
   0  ¯10  ¯14  ¯21    0
 ¯12   ¯8  ¯11   ¯9    0
 ¯14   ¯2   ¯2   ¯7    0
 ¯10   ¯9   ¯6   ¯3    0
   0   ¯1    0    0    0
   0    0   ¯1    0    0
   0    0    0   ¯1    0
OPTIMA[12]
  40    0   ¯4   ¯1  ¯10
  20    0   ¯3    7   ¯8
  ¯6    0    0   ¯3   ¯2
  26    0    3   15   ¯9
   4    0    1    2   ¯1
   0    0   ¯1    0    0
   0    0    0   ¯1    0
OPTIMA[13] 4  7  4
OPTIMA[4]
OPTIMA[5] 30  1  1  16  1
OPTIMA[6]
OPTIMA[7] 3
OPTIMA[8] 3
OPTIMA[9] 3
OPTIMA[10] ¯2  0  ¯1  ¯1  1
OPTIMA[11]
  40   ¯4    1  ¯10    0
  20    3    7   ¯8    0
  ¯6    0   ¯3   ¯2    0
  26    3   15   ¯9    0
   4    1    2   ¯1    0
   0   ¯1    0    0    0
   0    0   ¯1    0    0
OPTIMA[12]
  42   ¯4    0   ¯9   ¯1
   6   ¯3    0  ¯15    7
   0    0    0    1   ¯3
  ¯4    3    0  ¯24   15
   0    1    0   ¯3    2
   0   ¯1    0    0    0
   2    0    0    1   ¯1
OPTIMA[13] 4  7  4
OPTIMA[4]
OPTIMA[5] 40  1  1  16  1
OPTIMA[6]
OPTIMA[7] 3
OPTIMA[8] 24
OPTIMA[9] 24
OPTIMA[10] ¯1  0  ¯1  0  1
OPTIMA[11]
  42   ¯4   ¯9   ¯1    0
   6   ¯3  ¯15    7    0
   0    0    1   ¯3    0
  ¯4    3  ¯24   15    0
   0    1   ¯3    2    0
   0   ¯1    0    0    0
   2    0    1   ¯1    0
OPTIMA[12]
  51   ¯4    0   ¯1   ¯9
  21   ¯3    0    7  ¯15
  ¯1    0    0   ¯3    1
  20    3    0   15  ¯24
   3    1    0    2   ¯3
   0   ¯1    0    0    0
   1    0    0   ¯1    1
OPTIMA[13] 4  7  4
OPTIMA[4]
OPTIMA[5] 30  1  1  16  1
OPTIMA[6]
OPTIMA[7] 3
OPTIMA[8] 3
OPTIMA[9] 3
OPTIMA[10] ¯1  0  ¯1  0  1
OPTIMA[11]
  51   ¯4   ¯1   ¯9    0
  21   ¯3    7  ¯15    0
  ¯1    0   ¯3    1    0
  20    3   15  ¯24    0
   3    1    2   ¯3    0
   0   ¯1    0    0    0
   1    0   ¯1    1    0
OPTIMA[12]
  52   ¯4    0   ¯9   ¯1
  14   ¯3    0  ¯15    7
   2    0    0    1   ¯3
   5    3    0  ¯24   15
   1    1    0   ¯3    2
   0   ¯1    0    0    0
   2    0    0    1   ¯1
OPTIMA[13] 4  7  4
OPTIMA[4] 14
OPTIMA[14] VALOR OPTIMO = 52
OPTIMA[15]    VARIAVEIS = 1  0  2  14  2  5
OPTIMA[16] 0


      ⍞ GOMORY Q


VALOR OPTIMO = 52
   VARIAVEIS = 1  0  2  14  2  5
```

Capítulo 7

VARIÁVEIS BOOLEANAS E ALGORITMO «BALAS

7.1 — Transformação de Variáveis Inteiras em Variáveis Booleanas.

Há muitos problemas de P. L. I. cujas variáveis são por natureza booleanas mas em muitos outros as variáveis tomam quaisquer valores inteiros positivos embora geralmente não sejam muito grandes. Por outro lado alguns algoritmos trabalham apenas com variáveis booleanas e outros embora aceitem qualquer tipo de variáveis são frequentemente mais eficazes quando são booleanas as variáveis envolvidas.

Ora estes factos fazem com que seja de grande utilidade saber transformar variáveis inteiras quaisquer em variáveis booleanas até porque com esta transformação aumentamos a capacidade do algoritmo que vamos tratar e que passa a poder resolver inclusivamente os problemas resolúveis pelo Método de Gomory. O único obstáculo que pode surgir é aparecer com esta transformação um grande número de variáveis booleanas. Vejamos então como é feita tal transformação:

Qualquer variável inteira não negativa x se pode considerar como pertencente a um certo intervalo ($0 \leqslant x \leqslant L$) onde L é o seu limite superior. E sendo p o inteiro positivo tal que $2^{p-1} \leqslant L < 2^p$ sabemos que qualquer número inteiro se pode escrever sob a forma duma soma de potências de dois da seguinte maneira:

$$x = \sum_{i=1}^{p} 2^{p-i} \ \delta_i \qquad (3.1)$$

onde δ_i são variáveis booleanas. Temos então a variável x substituida por p variáveis booleanas.

Exemplo: suponhamos que a variável x inteira e não negativa toma no máximo o valor 20, isto é, ($0 \leqslant x \leqslant 20$) com $2^4 \leqslant 20 < 2^5$. Então será:

$$x = \sum_{i=1}^{5} 2^{5-i} \ \delta_i = 2^4 \delta_1 + 2^3 \delta_2 + 2^2 \delta_3 + 2^1 \delta_4 +$$

$$+ 2^0 \delta_5 = 16 \delta_1 + 8 \delta_2 + 4 \delta_3 + 2 \delta_4 + \delta_5$$

soma que dá 0, se $\delta_1 = \ldots = \delta_5 = 0$; dá 1, se $\delta_5 = 1$ e $\delta_1 = \ldots = \delta_4 = 0$; dá 2 se apenas $\delta_4 = 1$; dá 3 se apenas $\delta_4 = \delta_5 = 1$ etc., até 31 quando $\delta_1 = \ldots = \delta_5 = 1$, sendo $31 = 2^5 - 1$.

A equação (3.1) define então uma variável que pode tomar qualquer valor inteiro entre 0 e 2^{p-1}, portanto valores que podem ser até maiores que o limite superior L de x. Isto faz com que certas combinações de $\delta_i = 1$ se possam por vezes desprezar conforme a posição de L relativamente às potências de dois e como se vê nos três casos seguintes:

1.° $L = 2^p - 1$ (caso de $L = 31$ no exemplo): são possíveis todas as combinações de $\delta = 1$.

2.° $L = 2^{p-1}$ (caso de $L = 16$): podemos escrever a restrição de implicação: $\delta_i = 1 \Rightarrow \delta_i = 0$ para $2 \leqslant i \leqslant p$ ou, doutra forma: $\delta_1 + \delta_i \leqslant 1$ para $2 \leqslant i \leqslant p$.

3.° $2^{p-1} < L < 2^p - 1$: Começamos por definir o número L' por:

$$L' = L - 2^{p-1} > 0$$

donde por ser $L < 2^p$ vem $L' < 2^{p-1}$. Definamos agora o inteiro positivo q de modo que

$$2^{p-1} \leqslant L' < 2^q$$

e portanto $q \leqslant p - 1$ por ser $L' < 2^{p-1}$. Chamando I ao conjunto dos índices i tais que $q \leqslant p - i$ ou $1 \leqslant i \leqslant p - q$, podermos escrever:

$L' < 2^{p-i}$ para qualquer $i \leqslant p - q$, e portanto

$L < 2^{p-i} + 2^{p-1}$ para todo $i \leqslant p - q$.

Então olhando a definição (3.1)

$$x = 2^{p-1} + \sum_{i=2}^{p-q} 2^{p-i} + \sum_{i=p-q+1}^{p} 2^{p-i}$$

vê-se que para este limite superior de L, salvo se $q = p - 1$, se pode escrever a restrição $\delta_1 = 1 \Rightarrow \delta_i = 0$ ou $\delta_1 + \delta_i \leqslant 1$ para $2 \leqslant i \leqslant p - q$.

E três situações podem ocorrer:

a) $L' = 2^q - 1$. Então a única restrição possível é a anterior pois para além disso todas as combinações são possíveis.

b) $L' = 2^q - 1 = 2^{p-(p-q+1)}$: Pela definição de L', vem

$$L = 2^{p-1} + 2^{p-(p-q+1)}$$

e comparando com o segundo caso, vêm as seguintes restrições a acrescentar à anterior: $\delta_1 = 1$ e $\delta_{p-q+1} = 1 \Rightarrow \delta_i = 0$ ou $\delta_1 + \delta_{p-q+i} + \delta_i \leqslant 2$ para $p - q + 2 \leqslant i \leqslant p$.

c) $2^{p-1} < L' < 2^q - 1$. Define-se o número $L'' = L' - 2^{q-1} > 0$ e seguem-se os cálculos feitos para N' e assim sucessivamente até nos encontrarmos na alínea a) ou b) que faz terminar o processo.

Para ilustrar o que acabamos de expôr, tomemos como exemplo o problema pelo algoritmo «Gomory» mas na seguinte forma:

Minimize $10 x_1 + 4 x_2 + 21 x_3$ sujeito a $x \leqslant 0$ e inteiras, com

$$-8 x_1 - 11 x_2 - 9 x_3 \leqslant -12$$

$$-2 x_1 - 2 x_2 - 7 x_3 \leqslant -14$$

$$-9 x_1 - 6 x_2 - 3 x_3 \leqslant -10$$

Em primeiro lugar temos de encontrar um limite superior para as variáveis. Embora se veja que esse limite podia ser 7, tomemos $L = 12$ para discutirmos o 3.° caso:

$$0 \leqslant x \leqslant 12;\ 2^{4-1} \leqslant 12 < 2^4;\ p = 4;\ x = \sum_{j=1}^{4} 2^{4-i} \delta_i = 8 \delta_1 + 4 \delta_2 + 2 \delta_3 + \delta 4$$

Temos o 3.° caso pois $2^{4-1} < 12 < 2^4 - 1$; $L' = 12 - 2^{4-1} = 4$; $2^{3-1} \leqslant 4 < 2^3$; $q = 3$, e como $q = p - 1$ não é possível a primeira restrição do n.° 3. Mas $L' = 4 = 2^{3-1}$, alínea b) e portanto

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_i \leqslant 2 \quad \text{para} \quad 3 \leqslant i \leqslant 4, \quad \text{ou}$$

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 \leqslant 2$$

o que é verdade pois bastam duas variáveis $\delta_i = 1$ para dar o maior valor possível (12) para as variáveis. Assim o problema transforma-se em:

$$\begin{aligned}
&\text{Min } 80 \delta_1 + 40 \delta_2 + 20 \delta_3 + 10 \delta_4 + \\
&+ 32 \delta_5 + 16 \delta_6 + 8 \delta_7 + 4 \delta_8 + \\
&+ 168 \delta_9 + 84 \delta_{10} + 42 \delta_{11} + 21 \delta_{12}, \\
&- 64 \delta_1 - 32 \delta_2 - 16 \delta_3 - 8 \delta_4 - 88 \delta_5 - \\
&- 44 \delta_6 - 22 \delta_7 - 11 \delta_8 - 72 \delta_9 - \\
&- 36 \delta_{10} - 18 \delta_{11} - 9 \delta_{12} \leqslant -12 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 \leqslant 2 \\
&\delta_5 + \delta_6 + \delta_7 + \delta_8 \leqslant 2 \\
&\delta_9 + \delta_{10} + \delta_{11} + {}_{12} \leqslant 2
\end{aligned}$$

e resolvido o problema com as doze variáveis booleanas, para obtemos o resultado correcto $x_1 = 1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 2$ e valor óptimo 52, teria de ser $\delta_4 = \delta_{11} = 1$ e as restantes nulas, ou seja (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0,

1, 0,) que daria para valor óptimo $10 \times 1 + 42 \times 1 = 52$.

7.2. *Métodos de «Enumeração Implícita»*

Um problema de P. L. I. de variáveis booleanas pode ser assim apresentado na sua forma canónica:

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \text{ com } \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x \leqslant b_i ; \; 0 \leqslant x_j \leqslant 1; \; x_j \text{ inteiro na hipótese de } c_j \geqslant 0, \text{ para}$$

$i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 1, 2, \ldots, n$.

e isto porque basta fazer a transformação $x' = 1 - x$ para toda a variável x_j para transformar a maximização em minimização. E se fizermos a mesma transformação às variáveis que na função objectivo a minimizar tenham coeficientes negativos, conseguimos que todos os seus coeficientes sejam não negativos.

Chamamos variáveis de folga às variáveis $x^f \geqslant 0$ tais que

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j + x_i^f = b_i$$

e solução ao conjunto (x_j, x_i^f) de elementos que satisfaçam a igualdade anterior, que sejam inteiros e tais que pertençam ao intervalo [0; 1]. Existem portanto 2^n soluções. Chama-se solução admissível à solução anterior que satisfaça também $x^f \geqslant 0$ e será óptima se ainda minimizar a função objectivo. Vejamos agora em que consiste o princípio de Enumeração Implícita:

Caracterizando a solução S_k pelo conjunto $J_k = \{1, 2, \ldots, n\}$ constituído pelos índices das variáveis $x_j = 1$ nessa solução e sendo S_l uma otura solução tal que $J_k \subset J_l$, chamar-se-á a S_l solução descendente de S_k. O princípio dos métodos de enumeração implícita é não fazer cálculos senão num sub-conjunto das 2^n soluções. Assim do conjunto das soluções a examinar desprezam-se todas as já examinadas e aquelas que embora não examinadas são descendentes doutras já examinadas, ou por termos a certeza de conduzirem a valores da função objectvio superiores ou por serem não admissíveis. Do facto de ao ser analizada uma solução outras o serem implicitamente, vem o nome do Método de «Enumeração Implícita».

Logo se vê que o melhor método será aquele que permita desprezar o maior número de soluções descendentes.

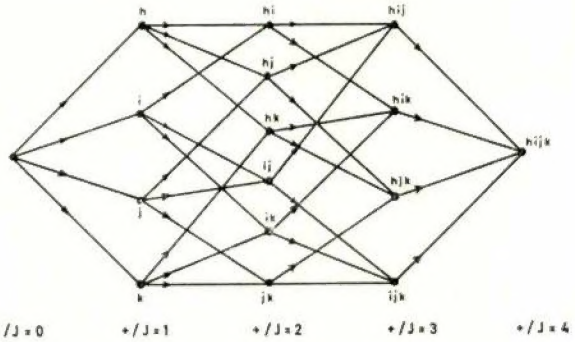
Os diversos algoritmos que seguem este princípio diferem entre si pela maneira de ver se uma determinada solução já foi examinada, pela escolha da variável igual a um para passar a uma solução descendente ainda não examinada e pelo processo de voltar atrás para escolher um novo conjunto J_k a examinar.

7.3. *Algoritmo de Balas*

7.3.1. *Generalidades e Notações*

Foi Balas quem apresentou o primeiro algoritmo baseado nos métodos de enumeração implícita. Posteriormente apareceram algumas ideias para melhorá-lo sob certos aspectos, especialmente por F. Glover com as suas restrições especiais ou a chamada «técnica do filtro» e ainda por A. Geoffrion.

Inicialmente parte-se duma solução S_o em que o correspondente conjunto dos índices das variáveis iguais a um, J_o, é vazio e vai-se passando a novas soluções (ou a novos caminhos possíveis do grafo apresentado) escolhidas sob certas regras. E assim que se atingem certas condições abandona-se o caminho seguido e metemos por outro até à solução óptima no caso da sua existência. Antes de entrar propriamente no algoritmo convém referir as notações seguintes:



onde $+/J$ designa o número de variáveis, ao lado de cada ponto, com o valor 1.

— As soluções são numeradas por $S_1, S_2, \ldots, S_k$, à medida que se vão obtendo e conservam o seu número ao longo dos cálculos.

— Designa-se por Z_p o valor da função objectivo correspondente a S_p, com J_p a designar o conjunto dos índices das variáveis iguais a 1.

— $\overline{Z}_k$ ou simplesmente $\overline{Z}$ será o valor da função objectivo correspondente à solução admissível S_k. Convenciona-se $Z_k = +\infty$ se não fôr admissível a solução encontrada.

— As variáveis de folga correspondentes à solução S_p serão designadas por $\overline{x}_{i,p}^f$ ou apenas $x_{i,p}^f$.

7.3.2. *Algoritmo*

1.º Iniciam-se os cálculos tomando para primeira solução S_o em que nenhuma das variáveis é igual a um, ou $S_o = \{0, 0, \ldots, 0\}$. Se após examinada esta solução se concluir que todas as outras estão implicitamente examinadas, para-se, se não, passa-se à solução S_1 acrescentando uma variável $x_j = 1$. A paragem é decidida pela aplicação da «regra de paragem» do número 3 e a nova variável é escolhida segundo a regra de escolha do número 5.

2.° Conhecida uma solução terá de aplicar-se a «regra de paragem» e para isso vamos definir o conjunto N_p dos índices não pertencentes a J_p (J_o é vazio), mas que juntos aos deste podem definir «melhores» soluções que as anteriores. Para isso começamos por considerar todos os índices possíveis (das variáveis booleanas) e excluimos os que pertencerem aos seguintes conjuntos:

— D_p, constituído por todos os índices j que unidos aos de J_p dão uma solução cujo correspondente valor da função objectivo é maior que $\overline{Z}_p$ (só se considera D_p se S_p é admissível, para termos $\overline{Z}_p$ finito), ou seja:

$$D_p = \{j : \overline{Z}_p + c_j > \overline{Z}_p\}$$

(atendendo a que usamos variáveis booleanas).

— E_p, constituído por todos os índices j que façam com que as variáveis de folga negativas em S_p, continuem ainda negativas mas com maiores valores absolutos nas soluções descendentes de S_p, ou seja:

$$E_p = \{j : a_{i,j} \geqslant 0 \text{ para todo o } i : x^f_{i,j} < 0\}$$

$$\text{pois} \quad x^f_{i,p+1} = x^f_{i,p} - a_{i,j}$$

— K_p, constituído por todos os índices que unidos ao de J_p dão origem a uma solução já examinada antes de S_p, ou seja:

$$K_p = \{j : J_p \cup \{j\} \text{ já foi examinada}\}$$

3.° Regra de paragem: Conhecido o conjunto N_p, para-se em S_p, isto é, não se examinam as soluções descendentes de S_p se:

a) S_p é solução admissível (as variáveis de folga são não negativas);

b) N_p é vazio, não existindo portanto qualquer índice que unido a J_p possa dar melhor solução;

c) N_p não é vazio mas para uma linha i tal que $x^f_{i,p} < 0$ tem-se

$$x^f_{i,p} - \sum_{j \in Np} \min (0; a_{i,j}) < 0$$

já que mesmo tornando iguais a zero as variáveis com coeficientes $a_{i,j} > 0$ e iguais a um as variáveis com coeficientes $a_{i,j} < 0$, a variável de folga continua negativa.

Se não ocorrer nenhum destes três casos passamos ao número 5.° para continuar os cálculos com nova solução descendente de S_p; se algum deles ocorrer passamos ao número seguinte.

4.° Regra do Passo Atrás: Consideramos todas as soluções do mesmo caminho percorrido de S_o a S_p e numeramo-las por ordem inversa: $S_{q,o}$ ($= S_p$), $S_{q,1}$, $S_{q,2}$, ..., $S_{q,p}$ ($= S_o$). Destas tomamos a primeira solução $S_{q,t}$ cujo correspondente $N_{q,t}$ contenha pelo menos dois índices (se contiver apenas um não vale a pena examinar as descendentes pois foi delas que acabámos de sair, conforme se vê no grafo) e definimos um novo conjunto $N'_{q,t}$ resultante de $N_{q,t}$ ao eliminar-se-lhe:

a) todos os índices que unidos a $J_{q,t}$ dão uma solução já atingida.

b) todos os índices que unidos a $J_{q,t}$ dão uma solução cujo valor da função objectivo é superior a $\overline{Z}$.

Conhecido este novo conjunto N voltamos a aplicar a regra de paragem do número 3.° e, caso não se pare, o que obrigaria a recuar ainda mais, passamos ao número 5.° para escolher a nova solução descente.

5.° Regra de Escolha: Chegados à solução S_p passa-se a uma solução descendente juntando a J_p um índice j pertencente ao conjunto N_p. Vejamos como se escolhe esse índice:

Para todas as $x^f_{i,p} < 0$ tem-se forçosamente

$$x^f_{i,p} - \sum_{j \in Np} \min (0; a_{i,j}) \geqslant 0$$

Então existindo um $l \in N_p$ tal que

$$x^f_{i,p} - \sum_{j \in Np} \min (0; a_{i,j}) - |a_{i,l}| < 0 \text{ com } a_{i,l} > 0$$

só se conseguem $x^f_i \geqslant 0$ se $x_l = 0$ e portanto evita-se a escolha do índice l. Ora, designando por r o escolhido, as variáveis de folga tomam os nossos valores

$$x^f_{i,p+1} = x^f_{i,p} - a_{i,r}$$

Assim se considerarmos para cada $j \in N_p$ a quantidade

$$Q = \sum_{i=1}^{m} \min (x^f_{i,p} - a_{i,j} ; 0)$$

e se não se anular para nenhum $j \in N_p$, a solução S_{p+1} não pode ser admissível. Escolheremos uma solução o mais próxima possível duma solução admissível, isto é, em que o valor absoluto das somas das variáveis negativas seja o menor possível. Para isso seleccionamos o índice r tal que

$$\max_{j \in Np} \left[\sum_{i=1}^{m} \min (x^f_{i,p} - a_{i,j} ; 0) \right]$$

Esta regra faz com que, se a expressão Q se anular, seja escolhido o índice r que torne S_{p+1} admissível. Se aparecerem vários índices para r será seleccionado o que provocar menor valor para a função objectivo. Resumindo, a regra de escolha consiste em:

— Se existir solução admissível é escolhido o r que dá tal solução.